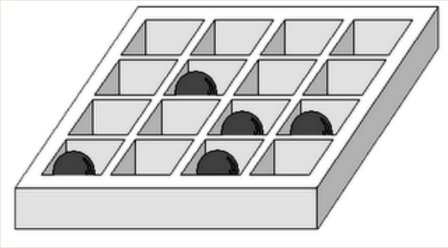
Combinatoria



Edición 2016

Colección Hojamat.es

http://www.hojamat.es

PRESENTACIÓN

No es fácil la Combinatoria. Por eso, la hoja de cálculo, los conteos ordenados y las simulaciones ayudan mucho a su comprensión. En este documento hemos omitido los aspectos teóricos, breves y muy conocidos, prefiriendo en su lugar la resolución de problemas y cuestiones.

Los problemas combinatorios resultan difíciles, y requieren planteamientos ordenados y mucha atención para resolverlos. Suelen admitir varios planteamientos, lo que refuerza la certeza de haberlos resuelto bien.

En esta edición se han añadido los temas *Función parking* y *Rachas de dígitos.*

Como advertiremos en todos los documentos de esta colección, el material presentado no contiene desarrollos sistemáticos, ni pretende ser un manual teórico. En cada tema se incluirán cuestiones curiosas o relacionadas con las hojas de cálculo, con la única pretensión de explicar algunos conceptos de forma amena.

TABLA DE CONTENIDO

PROBLEMAS

COMBINADO DE MURCIÉLAGO

La palabra MURCIELAGO ha sido usada tradicionalmente para la codificación en pequeños comercios, por tener diez letras distintas (5 vocales y 5 consonantes) que se pueden usar para representar las cifras de 0 a 9 en una asignación decidida por cada comerciante: M=0, C=1, E=2, etc.

Sobre ella se pueden plantear muchos problemas de distintos niveles. Aquí hemos elegido tres:

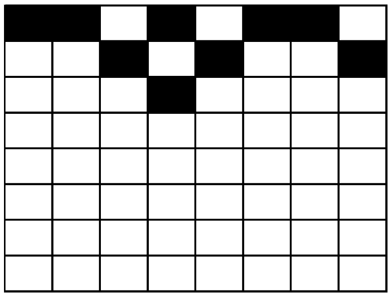
(a) ¿De cuántas formas se pueden ordenar las letras de MURCIELAGO, de forma que no caigan todas las vocales seguidas? (Se prohíben permutaciones como MRC**OAEIU**LG)

(b) ¿Y si deseamos que nunca aparezcan vocales consecutivas, aunque sólo sean dos? (Deseamos que todas estén separadas)

(c) ¿Y si, por el contrario, deben estar las cinco vocales consecutivas y en su orden natural?

Se pueden inventar más, pero la Combinatoria cansa mucho.

COLOREANDO EL TABLERO



¿De cuántas formas se puede colorear un tablero de ajedrez usando sólo los colores Blanco y Negro, de forma que cada cuadrado del mismo, de dos casillas de lado, contenga dos de ellas coloreadas en blanco y las otras dos en negro?

Para encontrar la solución puedes considerar las formas de rellenar de color la primera fila y cómo influye su contenido en las demás filas de más abajo, cumpliéndose la condición de que cada cuadrado de 2 por 2 contenga dos casillas blancas y dos negras.

Aquí la hoja de cálculo te puede ayudar a visualizar cada situación, como puedes observar en la imagen adjunta. Puedes usar el "deshacer" para ir viendo posibilidades

¿Cuántas formas de colorear pueden existir?

SUMAS GENERADAS CON TRES CIFRAS

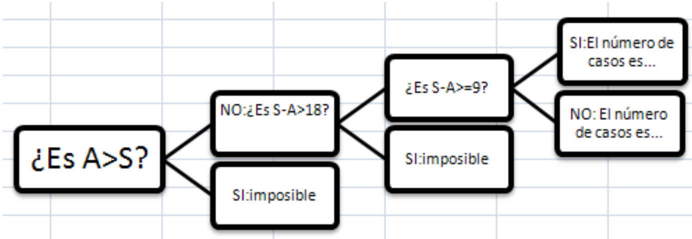
Consideramos los números enteros menores que 1000, desde el 000 hasta el 999. Para cada uno sumamos sus cifras y obtendremos una suma S. Encuentra un valor de S para el que hay exactamente 63 números que la producen.

Tres ayudas:

Para suma S=4 hay 15 números que la producen, desde 004 hasta 400.

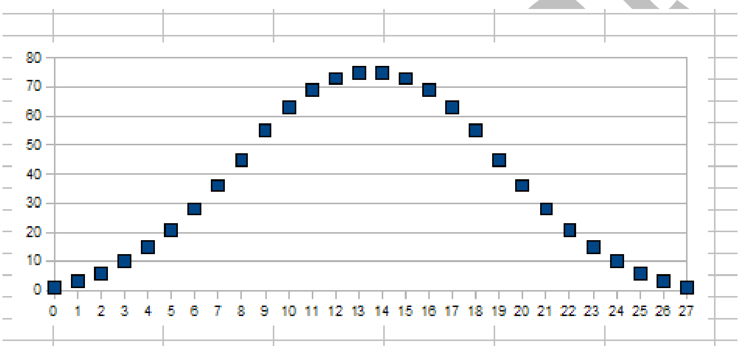
Para suma S=15 tendremos 69 soluciones.

Te puede ayudar este esquema de decisión, si llamas A a la primera cifra



Y una curiosidad:

Si representamos el número de soluciones para cada valor de S entre 0 y 27, nos resulta esto:



¿Te recuerda algo?

FRONTERAS EN UN TABLERO

Partimos de un problema

Se tiene un tablero cuadriculado de 10 por 10 casillas. La mitad de sus casillas se pintan de blanco, y la otra mitad de negro. Un lado común a dos casillas en el tablero se llama lado frontera si estas dos casillas tienen colores diferentes. Determinar el mínimo y el máximo número de lados frontera que puede haber en el tablero (propuesto en la OMCC).

Unas cuestiones se nos ocurren a partir de este poblema:

a) ¿Son posibles soluciones del problema todos los números comprendidos entre 10 y 180, o existe algún valor que nunca se produce?

b) ¿De cuántas formas se pueden elegir los cincuenta cuadrados que se pintan de negro?

La solución es 100891344545564193334812497256.

c) ¿Se podría organizar alguna simulación con ordenador? Se plantearían dos problemas:

c1) Si rellenamos aleatoriamente cincuenta cuadrados con color negro, habrá que tomar nota de los que ya poseen ese color antes de elegir el siguiente (que deberá ser blanco)

c2) Deberemos diseñar un procedimiento que recorra todos los bordes interiores de los cuadrados del tablero y lleve la cuenta de los que unen cuadrados de color diferente.

C3) Se podría completar con la estimación de la media

Estúdialo antes de seguir leyendo.

Respuestas

Por si no lo has intentado te ofrecemos dos versiones (Excel y OpenOffice.org) en la dirección

http://hojamat.es/blog/lineafront.zip

Si entras en el editor de Basic podrás analizar los algoritmos empleados. Son muy instructivos.

Nosotros hemos programado una serie de 500 simulaciones, lo que nos ha dado una estimación de 91,096 para la media de líneas frontera y 6,128 para la desviación estándar, así como que sólo son ligeramente probables los resultados centrales y altamente improbables los extremos. De hecho, no han aparecido números de líneas frontera inferiores a 66 o superiores a 111.

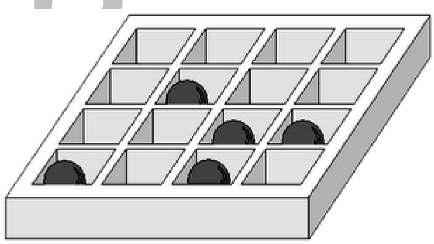
Si lo deseas, pon tu hoja de cálculo a "echar humo" para afinar los resultados.

Aquí tienes algunas frecuencias centrales que hemos obtenido:

90	32	6,40%
91	25	5,00%
92	34	6,80%
93	35	7,00%
94	29	5,80%
95	25	5,00%
96	17	3,40%
97	19	3,80%
98	16	3,20%
99	16	3,20%

El problema propuesto equivale a repartir 50 bolas en 100 cajas, de forma que

- No puede haber más de una bola por caja.
- Se considera que las cajas se distinguen unas de otras, pero que las bolas son indistinguibles.



En la imagen se han repartido 5 bolas en 16 cajas sin que haya ninguna caja con más de una bola. Es fácil ver que el número total de tales repartos es el número combinatorio C16,5 ya que la operación ha consistido en extraer un subconjunto de 5 elementos en un conjunto de 16, lo que constituye la definición de combinaciones sin repetición.

En el problema que nos ocupa de colorear 50 cuadrados negros en un cuadrado de 100 la solución será C100,50 = 100!/(50!*50!) = 100891344545564193334812497256

Este modelo concreto de cajas y bolas (bolas indistinguibles y no más de una bola por caja) tiene otras muchas aplicaciones:

Loterías

En la Lotería Primitiva de España se extraen seis bolas de un total de 49, que es lo mismo que acomodar seis bolas indistinguibles en 49 cajas numeradas. Quizás no hayas entendido la frase anterior. Repásala. Es como si en el sorteo tuviéramos un tablero de 49 números y marcáramos con una X los premios que han salido. Por tanto, el número de posibilidades es el número combinatorio C49,6 = 13983816

Este mismo modelo concreto de cajas y bolas nos servirá, pues, en todos los sorteos que se efectúen mediante extracciones y en los que no influya el orden de los resultados.

Permutaciones con repetición

El ejemplo de las 5 bolas alojadas en 16 cajas también se puede interpretar como que los símbolos VACÍA, LLENA se han permutado de todas las formas posibles, tomando 11 veces VACÍA y 5 veces LLENA, luego podemos usar números combinatorios también en este caso de permutaciones de dos elementos con repetición y número de apariciones fijado para cada uno.

En el ejemplo del tablero de 10 por 10, serían permutaciones de 50 cuadros negros y 50 blancos. Según lo que sabemos de Combinatoria, su número sería 100!/(50!*50!), que coincide con la solución propuesta del número combinatorio C100,50.

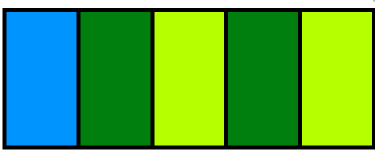
¿Qué cambiaría si las bolas fueran distinguibles?

COMBINATORIA CON COMPROBACIÓN

Los problemas de Combinatoria resultan muy difíciles en la Enseñanza Media. Requieren orden y sentido común y, en menor medida, el conocimiento de los principios fundamentales y las fórmulas de variaciones, combinaciones o permutaciones. El uso de los diagramas de árbol facilita la tarea, pero siempre hay ramas que “se pierden”.

El poder comprobar un problema después de encontrar una solución da seguridad si ha sido bien resuelto y posibilidad de rectificación en caso contrario. Para este fin hemos usado durante muchos años distintas versiones de nuestro programa Combimaq. Usaremos hoy la versión para hojas de cálculo.

Problema: *Se desea diseñar una nueva bandera constituida por cinco barras verticales que tengan como fondo uno de los tres colores azul, verde o amarillo. No se quiere que un mismo color sirva de fondo a dos barras consecutivas. ¿Cuántas banderas distintas se pueden diseñar con estas condiciones?*



Intenta encontrar la solución, que no resulta muy difícil.

Comprobación

Puedes descargarte Combimaq en una de sus versiones, para OpenOffice.org Calc o para Microsoft Office Excel 2003, en las direcciones

http://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/hoja/combimaq.ods

http://www.hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/hoja/combimaq.xls

En su primera hoja debes definir el número de símbolos, si importa el orden o no, etc.

En la segunda has de definir la condición de que no haya dos colores consecutivos iguales. Para ello activa la casilla de Condición de tipo algebraico (y desactiva las demás) y rellena con la fórmula adecuada:

(SU1#SU2)*(SU2#SU3)*…

Es decir: El primer elemento es distinto del segundo, y éste del tercero y… Lo dejamos así para que lo completes tú.

La solución es el producto de dos números pares consecutivos.

TEORÍA Y CURIOSIDADES

FROBENIUS Y LOS MCNUGGETS

Un número entero positivo “McNugget”, es aquel que es expresable como combinación lineal, con coeficientes enteros no negativos, de los números 6, 9 y 20. Se llama así porque 6, 9 y 20 eran los contenidos de las cajas de McDonald's® Chicken McNuggetsTM.

Hay números que son “McNugget”, como el 30 = 2*9+2*6, que abarcan un número entero de cajas (un pedido normal), y otros que no pueden serlo, como el 11, que no se puede descomponer en sumandos 6,9 y 20.

Este es un simpático ejemplo de descomposición de un entero N en sumandos extraídos de un conjunto (lista) L. Por ejemplo, el número 10, según la lista (5, 3, 1) se puede descomponer en

10= 5+5 = 5+3+1+1 = 5+1+1+1+1+1 = 3+3+3+1 = 3+3+1+1+1+1 = 3+1+1+1+1+1+1+1 = 1+1+1…

Las sumas las podemos expresar como combinaciones lineales:

10 = 2*5+0*3+0*1 = 1*5+1*3+2*1 = 1*5+5*1 =…

En el caso de los “McNugget”, los coeficientes serían, evidentemente, el número de cajas que deberíamos pedir.

Generalizando, dado un conjunto de números enteros positivos a_1, a_2, a_3,…a_n, diremos que otro entero positivo N es ***representable*** según ese conjunto si existen coeficientes enteros no negativos x_1, x_2, x_3,…x_n tales que N= a_1*x_1+a_2*x_2+…a_n*x_n

Según sea el conjunto a_1, a_2, a_3,…a_n será distinta la discusión de si todos los enteros positivos N son representables en ese conjunto. Nos referiremos a partir de ahora a aquellos en los que MCD(a_1, a_2, a_3,…a_n)=1, es decir, que sean coprimos, aunque no necesariamente dos a dos.

Este problema es llamado también ***de las monedas***, porque equivale a discutir si una cantidad de dinero se puede expresar sólo con dos o tres tipos de monedas (o de billetes, o de sellos).

Se puede demostrar que para números N grandes es posible siempre esta expresión de un número como combinación lineal de este tipo (uno de los teoremas de Schur). Existirá, por tanto, un número que sea **el mayor para el que no se cumpla**, que no sea representable en ese conjunto. Este es el llamado número de Frobenius. Por ejemplo, en los McNugget, el número de Frobenius es 43, porque es el mayor de los números no representables con 6, 9 y 20. Todos los mayores que él lo son.

Encontrar el número de Frobenius para un conjunto de varios números primos entre sí es un problema muy complejo (tipo NP-hard) que sobrepasa los objetivos de este blog, dedicado a las cuestiones de nivel medio.

No obstante, podemos hacer alguna propuesta sobre él.

(a) El que un número N suficientemente grande sea representable siempre lo podemos razonar para el caso de dos coeficientes. Sean A y B enteros positivos primos entre sí. Sabemos que entonces la ecuación Ax+By=N siempre tiene solución: X_0=pN-Bt Y_0=qN+At, siendo p y q una solución de Ax+By = 1 y t un parámetro. Lo que tienes que investigar es si para N suficientemente grande, X_0 e Y_0 pueden ser ambos no negativos. Pues a por ello.

Con la ayuda de la hoja de cálculo también se puede investigar algún aspecto de este problema:

(b) Nuestro Buscador de Números Naturales permite encontrar números que sean suma de múltiplos de otros. Así, los números McNugett serán suma de múltiplos de 6, 9 y 20. De esta forma puedes comprobar que el número de Frobenius para ellos es 43.

Sigue estos pasos:

Abre el Buscador de Naturales para Calc en

http://www.hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/herramientas/hojas/buscador.ods

o para Excel en

http://www.hojamat.es/sindecimales/divisibilidad/herramientas/hojas/buscador.xls

Borra las condiciones con el botón correspondiente y diseña una búsqueda como suma de múltiplos en "Suma Especial" guiándote por la siguiente imagen (escribe SI, M6, M9…)

3. Especiales		
Lee bien las instrucciones		
Suma especial		SI
Escribe C,T,P,o N= (o nada) en cada celda	A	M6
	B	M9
	C	M20
	D	

Concreta en la parte superior que buscaremos desde 1 hasta 200. Pulsa sobre el botón "Buscar números" y obtendrás una lista en la que a partir del número 44 todos aparecen consecutivos, por lo que se comprueba que 43 es el máximo que no es representable.

17	38	0 + 18 + 20
18	39	12 + 27 + 0
19	40	0 + 0 + 40
20	41	12 + 9 + 20
21	42	6 + 36 + 0
22	44	6 + 18 + 20
23	45	0 + 45 + 0
24	46	6 + 0 + 40
25	47	0 + 27 + 20
26	48	12 + 36 + 0
27	49	0 + 9 + 40
28	50	12 + 18 + 20
29	51	6 + 45 + 0
30	52	12 + 0 + 40
31	53	6 + 27 + 20
32	54	0 + 54 + 0
33	55	6 + 9 + 40
34	56	0 + 36 + 20
35	57	12 + 45 + 0
36	58	0 + 18 + 40
37	59	12 + 27 + 20
38	60	0 + 0 + 60

Silvester demostró que para dos números a y b coprimos, su número de Frobenius equivale a

g(a,b)=ab-a-b.

Puedes comprobarlo con el Buscador de Naturales. Borra condiciones y diseña una búsqueda sólo con dos múltiplos, y podrás observar que su número de Frobenius cumple la fórmula de Silvester. En la imagen puedes ver el caso de que a=11 y b=8, con lo que g(11,8)=11*8-11-8=69, y a partir del 70 todos son consecutivos.

30	64	64 + 0
31	65	32 + 33
32	66	0 + 66
33	67	56 + 11
34	68	24 + 44
35	70	48 + 22
36	71	16 + 55
37	72	72 + 0
38	73	40 + 33
39	74	8 + 66
40	75	64 + 11
41	76	32 + 44
42	77	0 + 77
43	78	56 + 22
44	79	24 + 55
45	80	80 + 0
46	81	48 + 33
47	82	16 + 66
48	83	72 + 11
49	84	40 + 44
50	85	8 + 77

(c) Hemos preparado un modelo de hoja de cálculo que encuentra todas las posibilidades de representación de un número respecto a otros varios. Por tratarse de un algoritmo voraz, puede tener algún fallo, pero parece funcionar bien.

		Problema de las monedas			
	Instrucciones en otra hoja				
					Búsqueda
Pasos	3	Número N	777		
	Coeficientes				
	42	7			
	23	21			

Puedes descargártelo desde la dirección

http://www.hojamat.es/blog/mcnugget.zip

En la segunda hoja dispones de unas breves instrucciones

Notas

(1) Hemos usado coeficientes multiplicadores para engendrar los distintos números considerados, pero no es necesario. Todas las cantidades engendradas por sellos, monedas o cajas se pueden considerar como elementos de un semigrupo engendrado por la lista (siempre que sean coprimos) y el número de Frobenius sería en este caso el mayor entero que no perteneciera al semigrupo.

(2) Para experimentar con el número de Frobenius en el aula se pueden usar las puntuaciones de los deportes. Por ejemplo en el rugby europeo por cada tipo de jugada (ensayo, transformación, castigo…) se acumulan 5, 3 o 7 puntos (con un ensayo transformado) Su número de Frobenius sería el 4.

MULTICOMBINATORIOS

Todo número natural m se puede expresar como un número combinatorio, porque

$$m = \binom{m}{1} = \binom{m}{m-1}$$

Sólo una proporción pequeña de números admite otra representación (o varias) en forma de número combinatorio. Así el 6 admite tres representaciones

$$6 = \binom{6}{1} = \binom{6}{5} = \binom{4}{2}$$

El número 35 admite cuatro

$$35 = \binom{35}{1} = \binom{35}{34} = \binom{7}{3} = \binom{7}{4}$$

Los números 120 y 210 admiten seis representaciones. Aquí tienes las de 120:

$$120 = \binom{120}{1} = \binom{120}{119} = \binom{10}{3} = \binom{10}{7} = \binom{16}{2} = \binom{16}{14}$$

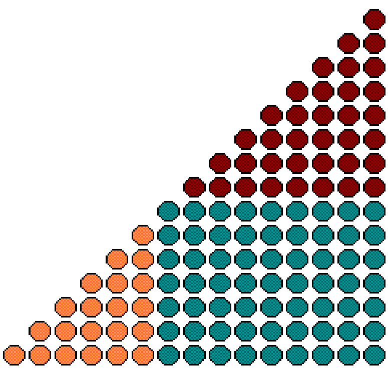
No hay muchos más números entre los 10000 primeros que presenten representaciones con tantas posibilidades. Sin embargo, existe un número de cuatro cifras, capicúa, que se puede representar de ocho formas diferentes.

¿Cuál es?

UNA CONCURRENCIA

Resultan muy interesantes las concurrencias entre métodos, representaciones o técnicas. Ahí tenéis una:

¿Qué tiene que ver esta imagen



con esta propiedad

$$\binom{a}{2} + \binom{b}{2} + a.b = \binom{a+b}{2}$$

y con este experimento?:

Toma un número cualquiera, lo descompones en dos sumandos como quieras, y multiplícalos. Vuelve a descomponer los sumandos al azar en otros dos más pequeños y vuelve a multiplicarlos. Sigue así con todos los números mayores que 1. Lo hagas como lo hagas, si sumas todos los productos obtendrás siempre la misma suma. ¿Cuál? ¿Cómo se demuestra?

Ejemplo:

12 = 7+5 (7*5=35)

7=5+2 (5*2=10) 5=4+1 (4*1=4)

5=3+2 (3*2=6) 2=1+1 (1*1=1) 4=2+2 (2*2=4)

3=2+1 (2*1=2) 2=1+1 (1*1=1) 2=1+1 (1*1=1) 2=1+1 (1*1=1)

2=1+1 (1*1=1)

Suma = 35+10+4+6+1+4+2+1+1+1+1 = 66

12 = 6+6 (6*6=36)

6=5+1 (5*1=5) 6=3+3 (3*3=9)

5=3+2 (3*2=6) 3=2+1 (2*1=2) 3=2+1 (2*1=2)

3=2+1 (2*1=2) 2=1+1 (1*1=1) 2=1+1 (1*1=1) 2=1+1 (1*1=1)

2=1+1 (1*1=1)

Suma = 36+5+9+6+2+2+2+1+1+1+1 = 66

SUBFACTORIALES

El otro día vi en Wikipedia esta curiosa igualdad:

148349 = !1 + !4 + !8 + !3 + !4 + !9

en la que el símbolo **¡n** se interpreta como subfactorial.

¿Qué es ***un subfactorial***?

Desarreglos

Dentro del grupo de permutaciones son interesantes aquellas llamadas ***desarreglos***, en las que la imagen de cada elemento es distinta del mismo. Por ejemplo, S=3412, es un desarreglo, pues S(1)=3, S(2)=4, S(3)=1, S(4)=2. Un ejemplo clásico es el de las cartas a las que se asignan sobres con la dirección ya escrita, y si se emparejan al azar, los desarreglos se producirían cuando todas las cartas se metieran en un sobre inadecuado (Problema de los sobres o de Montmort)

Si llamamos S a un desarreglo, se deberá cumplir que S(i) sea distinta de i para todo i del conjunto.

Para conseguir su fórmula es mejor contar las permutaciones contrarias F, es decir, en la que existe algún elemento fijo S(i)=i. Basta considerar que las que dejan fijo un sólo elemento son en total (n-1)¡, las que dejan 2, (n-2)¡, ... pero cada una deberá ser multiplicada por las formas de elegir un elemento, o dos, o tres, etc., es decir las combinaciones de los elementos que son fijos. Por el principio de inclusión-exclusión quedará:

$$F = \binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \binom{n}{3}(n-3)! \ldots - (-1)^n \binom{n}{n}$$

El número de desarreglos D equivaldrá a la diferencia de F con el número total de permutaciones, luego quedará:

$$D_n = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}$$

que se suele escribir más bien de esta forma:

$$D = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

El resultado de esta fórmula recibe también el nombre de ***subfactorial***, y se representa por !n.

El paréntesis es el desarrollo del número 1/e truncado por los términos que dan cocientes enteros con n! Por ello podemos interpretar esta fórmula como "el número entero más cercano a n!/e"

Una propiedad importante de D_n , derivada de la fórmula anterior, es que tiende al límite (1/e)n! = 0,36787944n! cuando n tiende a infinito. Por tanto, para valores grandes de n podemos suponer que un 37% de las permutaciones de un conjunto de n elementos son desarreglos.

D_n también se calcula mediante recurrencias (Euler). Se puede demostrar que $D_n = nD_{n-1}+(-1)^n$ (Ver Soluciones), lo que unido a que $D_1=0$ y $D_2=1$ nos da la lista de los primeros subfactoriales: 0, 1, 2, 9, 44, 265, 1854...porque 9=2*4+1: 44=9*5-1; 265=44*6+1…

Notas

(1) Euler dio otra fórmula de recurrencia para D_n:

$D_n=(n-1)*(D_{n-1}+D_{n-2})$

¿Cómo demostrarla a partir de la anterior? (Ver Soluciones)

(2) Para calcular el valor de un subfactorial podemos usar esta fórmula:

$$!n = \left[\frac{n!}{e}\right]$$

Donde el corchete se interpreta como el entero más próximo.

(3) Todo lo anterior permite implementar la función ¡n en hoja de cálculo. La forma más simple es la de usar la fórmula

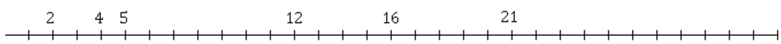
=REDONDEAR(FACT(“Celda del número n”)/EXP(1);0)

Si deseas repasar técnicas de Basic, puedes también incorporarla como función a tu hoja de cálculo. En el Apéndice se incluyen dos versiones de código distintas.

JUGAMOS CON SIDON Y GOLOMB

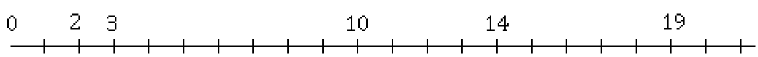
Regla de Golomb

Se le da el nombre de Regla de Golomb a un conjunto de marcas señaladas en una regla imaginaria, tal que todas las diferencias entre marcas sean distintas. Por ejemplo, estas:



Las seis marcas presentan las quince diferencias 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 17 y 19 distintas. Se llama orden de la regla al número de marcas, en este caso 6, y longitud a la mayor diferencia entre ellas, 19 en el ejemplo.

Como lo importante del tema son las diferencias, se suele hacer coincidir la primera marca con el 0. De esta forma, la anterior regla quedaría así:



Estas marcas poseen las mismas diferencias, pero no abarcan todas las posibles medidas. Por ejemplo, con esta regla no se podría medir una distancia (diferencia) de 13. Una regla que mida todas las longitudes posibles recibe el nombre de perfecta, y si es la más corta dentro de su orden, óptima. Por ejemplo, {0, 1,4.6} forman una regla perfecta, pues se pueden medir con ellas las longitudes 1, 2, 3, 4,5 y 6.

No profundizaremos más en este tema, porque nuestro objetivo es otro. Hay muchas páginas web que estudian este tipo de reglas.

Conjunto de Sidon

Un conjunto de números naturales se llama de Sidon cuando todas las sumas posibles entre sus elementos son distintas. Por ejemplo {3, 5, 8, 9} produce las sumas 8, 11, 12, 13, 14 y 17.

Se puede demostrar que un conjunto finito de Sidon es también una regla de Golomb, y a la inversa (si se prescinde del convenio de comenzar por cero). Por tanto, un conjunto finito es de Sidon si produce diferencias entre sus elementos todas distintas. Intenta demostrarlo, que no es difícil.

Muchos matemáticos han estudiado estos conjuntos, entre ellos Erdös. Una de las cuestiones que estudió fue la del número máximo de elementos que puede tener un conjunto de Sidon incluido en el conjunto {1…N}. Invitamos a nuestros lectores a encontrar alguna de las cotas que están publicadas en la Red.

En esta entrada usaremos estos dos conceptos para, en cierto sentido, jugar con ellos, y plantear una posible actividad en un aula de enseñanza secundaria.

Nos plantearemos estos objetivos:

- Conjeturar el número máximo de un conjunto de Sidon (o una regla de Golomb) según una cota propuesta, mediante generaciones aleatorias de ese tipo de conjuntos.
- Construir de forma efectiva conjuntos de Sidon con cota máxima de 25 (con una cota mayor la presentación del pasatiempo sería más incómoda).
- Experimentar cómo cambian el orden y la longitud de una regla de Golomb según la forma progresiva de elegir los elementos.
- Establecer competiciones y colaboraciones en un aula.

Descripción del pasatiempo

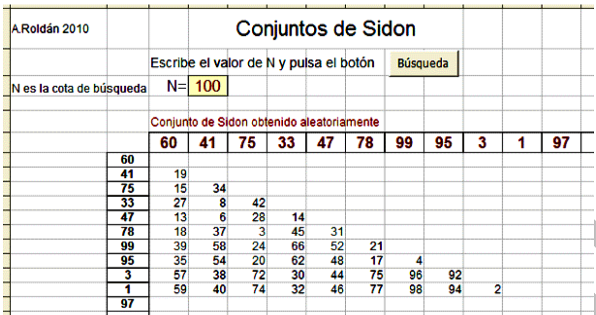
Proponemos el uso de un modelo de hoja de cálculo que puedes descargar en esta dirección

http://hojamat.es/blog/sidon.zip

Consta de cuatro hojas, cada una con un objetivo distinto:

Generación aleatoria

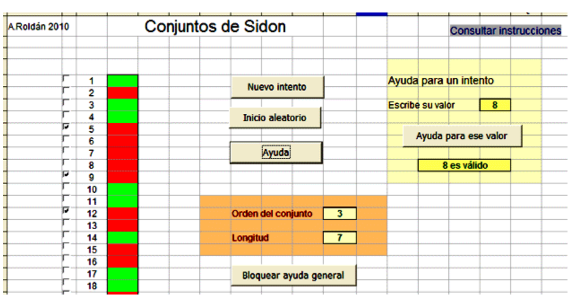
En esta hoja se generan conjuntos de Sidon de forma aleatoria. Suele encontrar rápidamente conjuntos de orden máximo, y sirve de presentación del concepto y de comprobación de que todas las diferencias son distintas.



En la imagen se han obtenido diez elementos menores que 100 (el 97 no era válido), que han producido 45 diferencias distintas. Este tipo de generaciones no prueba nada, pero ayuda a dar una idea de la magnitud del orden máximo.

Construcción manual

En la segunda hoja se puede construir un conjunto de Sidon con cota 25 (o menor, si se desea, pues basta no usar los últimos valores). El funcionamiento se explica en el modelo, pero aquí destacaremos que permite cambiar rápidamente los valores a fin de estudiar el orden y la longitud del conjunto. La generación aleatoria y la ayuda lo hacen apto para su uso por un alumnado no universitario.



La imagen representa un conjunto en el que sólo se han activado los valores 5, 9 y 12, con las casillas marcadas en rojo que representan los valores que no puede tomar el siguiente elemento. Se supone que se irían añadiendo elementos hasta un total de cinco o seis, según la habilidad con la que se elijan. También se puede intentar minimizar la longitud.

Tabla e instrucciones

El modelo se completa con una tabla de diferencias para el caso en el que se bloquee la ayuda y con unas breves instrucciones.

Uso en el aula

Este tipo de ejercicios se pueden proponer en enseñanza secundaria, en talleres de Matemáticas, prácticas de Informática o trabajos voluntarios. Sus ventajas son, entre otras:

- Exigen concentración
- Fomentan la práctica del cálculo mental
- Se promueve la comprobación de conjeturas
- Permiten gran variedad de tipos de organización de un trabajo en grupos.

Tareas posibles

- Comprensión de los conceptos mediante el modelo aleatorio.
- Elaboración de conjeturas de cotas de un conjunto de Sidon dentro del conjunto {1…N}
- Construcción manual de conjuntos de orden máximo o de longitud mínima
- Comprobación de reglas de Golomb perfectas

¿Será útil todo esto? Sólo lo sabremos si probamos a desarrollarlo. Desde aquí animamos al profesorado a "que se atreva" con ciertas cuestiones sin temor al fracaso. Bastante deteriorada está la enseñanza en algunos ámbitos como para ser conservadores. ¿Todo merece ser conservado? Creemos que no.

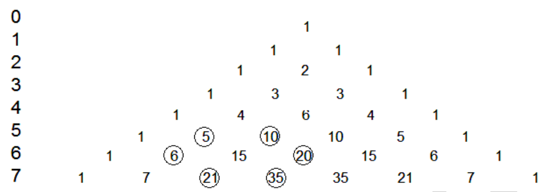
IDENTIDAD DEL HEXÁGONO

Una de Combinatoria, a la que tenemos algo abandonada:

Demuestra la identidad del hexágono:

$$\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k}=\binom{n-1}{k}\binom{n}{k-1}\binom{n+1}{k+1}$$

llamada así porque en el triángulo de Pascal los tres números combinatorios forman esa figura:



En la imagen 5*20*21 = 10*6*35 = 210

CHICA, CHICO, CHICA

Es tradición que en comidas de empresa o familiares se ponga empeño en que no se sienten juntas dos mujeres (o dos hombres), y se programa siempre el esquema chica, chico, chica… ¿Cómo estudiaría esta costumbre la Combinatoria?

El problema es más interesante si sólo prohibimos que estén juntas dos chicas, por ejemplo. Lo expresamos mediante unos y ceros:

Consideremos todos los conjuntos ordenados formados por ceros y unos, como 11001010. Exijamos que no haya dos ceros consecutivos. ¿Cuántos conjuntos ordenados de ese tipo aparecerán para cada valor de n? Representaremos ese número como O(n)

Para n=1 sólo existen dos conjuntos ordenados, (1) y (0), luego O(1)=2

Si n=2 obtendremos tres: (11),(10) y (01) (recuerda que están ordenados). O(2)=3

Si n=3 se pueden formar estos 5: (111), (110), (101), (011), (010). O(3)=5

Pero estos números; 2, 3, 5… ¡son términos de la sucesión de Fibonacci! ¿Seguirá ocurriendo así? ¿Será 8 el siguiente número correspondiente a conjuntos de cuatro símbolos (O(4)=8 y 13 el valor de O(5)? Te dejamos este reto. Recuerda la relación de Fibonacci y demuestra que nuestros conjuntos la cumplen. Como ayuda, considera los conjuntos de n+1 elementos divididos en dos clases, los que comienzan por 1 y los que lo hacen con 0.

Si lo has resuelto, intenta esto otro: ¿Qué significado tiene esta sucesión de números (relacionada con lo anterior)?: 0, 1, 3, 8, 19, 43, 94, 201, 423,…Puedes buscar en la Red.

Ejemplos como este desmitifican el carácter casi mágico con que se explica la presencia de los números de Fibonacci en la naturaleza. Aparecen porque son consecuencia de procesos de agregación y ordenación que a veces son tan complejos que permanecen ocultos, pero que son causa de la presencia de estos números.

SUMA DE LOS ELEMENTOS DE TODOS LOS SUBCONJUNTOS

Tomemos el conjunto formado por los n primeros números naturales {1, 2, 3, …, n}. Imagina que formamos todos los subconjuntos posibles y que en cada uno sumamos los elementos, acumulando después todas las sumas en un total general ¿Cuánto valdrá esa suma S(n) de todos los elementos de todos los subconjuntos? Al conjunto vacío le asignamos suma 0.

Te damos un ejemplo:

S(4)=80, porque tendríamos que sumar (escribimos entre paréntesis la suma parcial de cada subconjunto) lo siguiente. Sería así: (0)+(1)+(2)+(3)+(4)+(1+2)+(1+3)+(1+4)+(2+3)+(2+4)+(3+4)+(1+2+3)+(1

+2+4)+(1+3+4)+(2+3+4)+(1+2+3+4)=10+3+4+5+5+6+7+6+7+8+9+10= 27+26+27=80

Los primeros resultados para la función S son S(1)=1; S(2)=6; S(3)=24; S(4)=80; S(5)= 240; S(6)=672, formando la sucesión 1, 6, 24, 80, 240, 672, 1792, 4608, 11520, 28160, 67584, 159744…

¿Sabrías justificar este resultado?

Podemos encontrar una definición por recurrencia. Que S(1)=1 y S(2)=6 es fácil de justificar. A partir de ahí razonamos de una forma muy común en Combinatoria: Sea S_{n-1} la suma de los subconjuntos de {1, 2, 3, …, n-1}. Para formar la suma S_n deberemos añadir el elemento n a los subconjuntos. Entonces estos serán de dos formas:

(a) Subconjuntos que no contienen al elemento n. Su suma será la misma S_{n-1}

(b) Subconjuntos que contienen al elemento n. Estarán formados por los subconjuntos de 1, 2, 3, …, n-1} a los que añadimos a cada uno el elemento nuevo n. El número de tales subconjuntos equivale a 2^{n-1}. Como cada uno se ha incrementado en el elemento n, la suma se habrá incrementado en $n*2^{n-1}$. Luego será $S_{n-1}+ n*2^{n-1}$.

Si reunimos las sumas (a) y (b) nos resulta la fórmula de recurrencia:

$$S_n = 2S_{n-1} + n2^{n-1}$$

En efecto: S(3)=2*6+3*4=12+12=24; S(4)=2*24+4*8=48+32=80; S(5)=2*80+5*16=160+80=240.

Es fácil programarlo en hoja de cálculo. Sólo incluimos una tabla creada así sin dar más detalles:

1	1	1
6	2	2
24	4	3
80	8	4
240	16	5
672	32	6

1792	64	7
4608	128	8
11520	256	9
28160	512	10
67584	1024	11
159744	2048	12
372736	4096	13

Generalmente nos sentimos más a gusto con una fórmula algebraica. Ahí va:

$$S_n = n(n+1)2^{n-2}$$

S(1)=1*2*(1/2)=1; S(2)=2*3*1=6; S(3)=3*4*2=24; S(4)=4*5*4=80…

Se puede demostrar por inducción. Vemos que se cumple para los primeros casos, luego podemos suponer que se cumple para n-1, es decir, que $S_{n-1}=(n-1)*n*2^{n-3}$.

Aplicamos la fórmula de recurrencia presentada más arriba y nos queda:

$S_n=2*(n-1)*n*2^{n-3}+n*2^{n-1}=(n^2-n)*2^{n-2}+2*n*2^{n-2}=(n^2-n+2n)*2^{n-2}=n(n+1)2^{n-2}$ lo que completa la demostración.

Otra demostración

La suma T=1+2+3+4+…+n equivale al número triangular n(n+1)/2. Esta suma se repite en S(n) varias veces. Por ejemplo, la suma de todos los elementos unitarios es T. También vale T la suma de elementos del conjunto total. Veamos los demás conjuntos:

Clasifiquemos los subconjuntos por su número de elementos. El número de los que tienen r elementos es Cn,r. Por razones de simetría, los elementos 1,2,3,…n se repiten en total, para un mismo r, igual número de veces, luego la suma de los elementos de estos subconjuntos es múltiplo de T.

Cada elemento se repite en los conjuntos de r elementos tantas veces como indique Cn-1,r-1, luego la suma de todos equivaldrá a Cn-1,r-1*T. Si sumamos todos nos dará:

T*Cn-1,0+T* Cn-1,1+ T* Cn-1,2+ T* Cn-1,3+…+ T* Cn-1,n-1 = $T*2^{n-1}$ = $n(n+1)/2*2^{n-1}$ = $n(n+1)*2^{n-2}$, que es la fórmula propuesta.

¿Se te escapó algún detalle? Repasa, repasa…

Quienes acostumbráis a visitar OEIS habréis descubierto que estas sumas forman la secuencia http://oeis.org/A001788. Si la estudiáis podréis descubrir la gran cantidad de interpretaciones que tiene.

FUNCIÓN "PARKING"

Estudiamos hoy un tema de Combinatoria, que la teníamos un poco abandonada. Se trata de la función "parking", o arreglos de aparcamiento. El planteamiento es el siguiente:

Imaginemos un aparcamiento de una empresa, situado en una calle estrecha, en la que no es posible dar marcha atrás, y que contiene **n** aparcamientos, que numeraremos de 1 a n. Podemos pensar que es el inicio de una jornada de trabajo y que suelen aparcar en ella siempre los mismos n coches.

Puede ocurrir que cada coche tenga preferencia por un determinado aparcamiento. Si llega y está libre, lo ocupa, y si no, como no puede retroceder, ocupa el siguiente que esté libre. Esto hace que no todas las preferencias de los coches sean viables. Unamos en un mismo conjunto ordenado las preferencias de los conductores. Por ejemplo, si n = 3, el conjunto ordenado (2, 1, 1) es viable, porque el primer coche ocuparía el aparcamiento 2, su preferido. El segundo iría al 1, y el tercero, aunque prefiere el 1, ha de irse al 3, pero aparca.

El arreglo (2, 3, 2) no es válido, ya que el primer coche aparca en el 2, el segundo en el 3, pero el tercero, encuentra ocupado su preferido 2 y también el siguiente, y no puede aparcar. Vemos que una hipótesis poco creíble es que cada conductor se dirige a su aparcamiento preferido ignorando los anteriores. Imaginemos que su empecinamiento le costaría volver a intentarlo y esta vez ocupar el 1 aunque no fuera su preferido, pero esas son las reglas de este juego.

Simulación

Hemos preparado una hoja de cálculo muy simple para que experimentes qué preferencias son válidas. La tienes alojada en la dirección

http://www.hojamat.es/blog/parking.xlsm
Basta escribir en ella dichas preferencias, ajusta el retardo en segundos para ver bien el proceso, y rellenar las preferencias. Al pulsar los botones "Vaciar parking" e "Intento", se desarrollará, con el retardo que desees, el proceso de aparcamiento.

En la imagen puedes ver el final del proceso con unas preferencias válidas

	Número de plazas		7		Retardo en sg.	0,3
A	B	C	D	E	F	G
2	1	1	4	5	7	6
1	2	3	4	5	6	7
B	A	C	D	E	G	F

Todos los coches han podido aparcar

En esta otra imagen hemos creado unas preferencias no válidas

	Número de plazas		7		Retardo en sg.	0,3
A	B	C	D	E	F	G
2	1	6	4	5	7	6
1	2	3	4	5	6	7
B	A		D	E	C	F

La plaza tercera se ha quedado vacía y el coche G no ha podido aparcar.

Llamamos *coches afortunados* ("lucky car") a aquellos vehículos que aparcan donde ellos prefirieron previamente. En el ejemplo de la imagen son afortunados A, B, C, D, E y F. Si las preferencias se repiten, sólo serán afortunados algunos de los coches pretendientes a una plaza. Se llama salto ("jump") al número de plazas que ha de desplazarse un coche si no logra su plaza preferida. Es evidente que los afortunados presentan un salto igual a cero.

Criterio de validez

Se puede razonar que una función parking es válida si se pueden ordenar las preferencias en orden creciente, y entonces, cada una de ellas **es menor o igual que su número de orden**. En caso contrario, si una preferencia fuera mayor, se dejaría una plaza vacía aunque entraran todos los coches, por lo que alguno de ellos quedaría fuera. En el anterior ejemplo (2, 3, 2) ordenamos de forma creciente (2, 2, 3) y observamos que no hay forma de llenar la plaza número 1, que quedaría vacía. Por el contrario, si en el orden creciente no se sobrepasa el número de orden, como en (1, 3, 1), o en orden creciente (1, 1, 3), sea cual sea el orden de entrada, siempre habrá plaza para todos. Si el orden creciente es válido, cualquier permutación del mismo también lo será.

Con esta condición, no es difícil escribir todas las funciones válidas en su forma ordenada creciente. En el caso de 3 serían

(1, 1, 1) (1, 1, 2) (1, 1, 3) (1, 2, 2) (1, 2, 3)

Ahora le aplicamos a cada una las permutaciones posibles, con lo que nos dará 1+3+3+3+6=16 funciones válidas distintas. Coincide este resultado con la expresión

$$P(n) = (n+1)^{n-1}$$

En este caso $(3+1)^{3-1}=4^2=16$. Se puede demostrar, mediante teoría de grafos, que esta expresión es válida. En esta dirección puedes leer un esbozo de demostración

http://www-math.mit.edu/~rstan/transparencies/parking.pdf

La idea consiste en añadir otra plaza más de aparcamiento, la n+1 que dejamos vacía, y permitir a los coches otro intento. De esta forma todos aparcarán, aunque se puedan dejar una plaza vacía. El número de opciones ahora será (n+1) elementos para n plazas. El número de funciones es, por tanto, $(n+1)^n$. Si sometemos al proceso a una traslación módulo n+1, sólo será función válida aquella que deje vacía la plaza n+1. Dividimos y queda $(n+1)^n$.

Generación de resultados

Las funciones parking ordenadas se pueden obtener mediante construcción directa, ya que sólo hay que tener cuidado de no sobrepasar del índice i en el término a(i). Para valores de n mayores hemos usado nuestra hoja de cálculo Cartesius (no publicada en este momento). Por ejemplo, en la imagen puedes observar las 14 funciones ordenadas para n=4

	X1	X2	X3	X4
1	1	1	1	1
2	1	1	1	2
3	1	1	1	3
4	1	1	1	4
5	1	1	2	2
6	1	1	2	3
7	1	1	2	4
8	1	1	3	3
9	1	1	3	4
10	1	2	2	2
11	1	2	2	3
12	1	2	2	4
13	1	2	3	3
14	1	2	3	4

Para n=5 resultarían 42 arreglos. En general, el número de funciónes parking ordenadas coincide con los números de Catalan:
1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862,… (http://oeis.org/A000108).

Como tales, se pueden generar con la fórmula

$$C(n) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Por ejemplo, C(4)=1/5C(8,4)=70/5=14

RACHAS DE DÍGITOS

En Combinatoria es interesante el problema de las rachas, conjuntos de elementos consecutivos iguales. Por ejemplo, el conjunto AABBCDDDDEE posee cinco rachas; AA, BB, C, DDDD y EE. No se impone ninguna condición a la longitud de cada racha.

Aquí estudiaremos algunas rachas de dígitos que puede presentar un número entero. Distinguiremos tres tipos con sus estadísticas correspondientes y después particularizaremos en algunos casos, como primos, cuadrados o triangulares.

Tipos de racheado

Un número puede presentar los dígitos agrupados, es decir, con rachas todas de longitud mayor que 1, como pueden ser 3366677 o 112222. Le llamaremos número de tipo 1, o con "dígitos agrupados".
Puede ocurrir que ningún dígito se agrupe con el siguiente, que equivale a afirmar que todas las rachas tienen longitud 1, como en 345643. Obsérvese que no se prohíbe que los dígitos se repitan, siempre que no sean consecutivos. Serán estos números los del tipo 2, o de "dígitos aislados"

Los restantes números presentarán rachas de longitud 1 y otras mayores, como en el caso de 1442 o 54322111. Les asignaremos el tipo 3, que es el menos interesante.

Independientemente de consideraciones combinatorias, podemos evaluar de forma aproximada la frecuencia que presenta cada uno de los casos. Usaremos una función en Visual Basic de hoja de cálculo, que, por su relativa complejidad, explicamos al final de la entrada.

El algoritmo que usa funciona en dos fases:

(1) Búsqueda de las rachas existentes entre los dígitos del número entero. En el listado del final puedes ver que se almacenan en una matriz r.

(2) Estudio de la longitud mínima y máxima de racha existente en el número.

Si la mínima longitud no es 1, los dígitos se presentan agrupados, y el entero será de tipo 1. Si la máxima es 1, no habrá agrupamientos, y el tipo será 2. Los restantes ejemplos serán de tipo 3.

Si te apetece, sigue estas fases en el listado VBA del final.

Frecuencias de los tipos

Mediante la función citada y un contador adecuado, hemos observado que las frecuencias en los distintos intervalos son bastante parecidas a las de la tabla, obtenida en el intervalo (10000, 100000)

A	10000	
B	100000	
Tipo 1	171	0,19%
Tipo 2	59049	65,61%
Tipo 3	30781	34,20%
	90001	100,00%

Se observa que son muy escasos los de tipo 1, con todos los dígitos agrupados, un 0,19%, los más frecuentes los del tipo 2, con dígitos aislados, con un 65,61%, quedando los del tipo mixto en una frecuencia intermedia del 34,20%. En otros intervalos las frecuencias son semejantes, ya que están basadas en propiedades combinatorias.

Justificar estas frecuencias puede resultar complejo, pero en el caso del tipo 1 no es difícil. Son 171 porque de dos cifras los únicos agrupados son 11, 22, 33,…99. Si le añadimos una cifra más, deberá ser idéntica a la última, luego, seguirán siendo 9: 111,222,…,999. Al llegar a cuatro cifras disponemos de dos caminos para construir los números de tipo 1: O bien añadimos dos cifras iguales por la derecha a los de dos cifras (incluido el cero), con lo que tendríamos 9*10=90 casos, como 1199, 2200,… o bien las añadimos por la izquierda (sin el cero), lo que daría 9*9=81 casos. Sumamos y obtenemos 90+81=171, que es lo que nos da la estadística.

En general, para una racha existen 9 posibilidades si ignoramos el 0. Para dos, 9*9, ya que ambas han de contener dígitos distintos, y para tres rachas, 9*9*9=729. Con una hoja nuestra sobre Combinatoria hemos calculado el número de rachas de cada tipo hasta 7 cifras, quedando esta tabla:

	Número de cifras						
Posibles rachas	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	1	1	1	1	1
2	0	0	0	1	2	3	4
3	0	0	0	0	0	1	3
4	0	0	0	0	0	0	0
Total	0	9	9	90	171	981	2520

Todas las cantidades están comprobadas: 9 números de tipo 1 de dos cifras, 9 de tres, 90 de cuatro, 171 de cinco, 981 de seis y 2520 de siete.

¿Presentarán los distintos tipos de números frecuencias parecidas? Por ejemplo, ¿existirán más rachas con longitud superior a 1 en los cuadrados?¿y en los primos?...Nos dedicaremos, en plan lúdico, a estudiar diversos casos y observar, si existen, variaciones apreciables en las frecuencias.

Los cuadrados

Por este carácter informal que queremos darle a este estudio, nos limitaremos en todos los casos al intervalo (1, 100000), ya que con él basta para detectar curiosidades.

En ese intervalo sólo aparece el cuadrado 7744=88^2, y las frecuencias son

Cuadrados	
1	0%
208	66%
107	34%
316	100%

Prácticamente coinciden con el caso general. No aparece ningún otro cuadrado de ese tipo entre 1 y 500000. Estás invitado a buscar uno. Por cierto, si lo encuentras, deberá terminar en 00 o 44. Razónalo si te apetece.

Los primos

Establecemos el mismo intervalo, para ver si tampoco en este caso se aprecian diferencias importantes. Y no, resultan casi iguales a las anteriores:

Primos	
15	0%
6387	66%
3190	33%
9592	100%

Los 15 primos encontrados son: 11, 11177, 11777, 22111, 22277, 22777, 33311, 33377, 44111, 44777, 55333, 55511, 77711, 77999 y 88811. Como ves, son muy atractivos. Puedes ver más en http://oeis.org/A034873

Como en el caso de los cuadrados, sólo unas terminaciones son válidas: 11, 33, 77, 99, como es fácil entender.

Otros casos

Ya vamos sospechando que las frecuencias variarán poco. Lo vemos:

Triangulares

En este caso aumentan algo las frecuencias de tipo 1 y 2 en detrimento del 3:

Triangulares	
4	1%
321	72%
121	27%
446	100%

Los cuatro triangulares de tipo 1 son muy sugestivos: 55, 66, 666, 2211, Tienes más en http://oeis.org/A116055

Oblongos

Como estos números son los dobles de los triangulares, presentan frecuencias similares, también con ligero predominio de los tipos 1 y 2 respecto al conjunto de todos los números.
En el intervalo (1,100000) sólo aparecen tres de tipo 1: 1122=33*34, 4422=66*67 y 9900=99*100. No están publicados los siguientes. Si te atreves…

Pentagonales

Aparecen tres de tipo 1:22, 8855 y 55777.

Pitagóricos

¿Qué longitudes de hipotenusas de triángulos de lados enteros aparecerán de tipo 1?
De este tipo aparecen muchos más, pues estarían entre ellos algunos múltiplos adecuados de 55, 111 y 100, que presentan rachas de al menos dos elementos. Estos son los primeros, con sus correspondientes catetos:

55	33 , 44
111	36 , 105
222	72 , 210
333	108 , 315
444	144 , 420
555	171 , 528
666	216 , 630
777	252 , 735
888	288 , 840
999	324 , 945
1100	308 , 1056
1111	220 , 1089

Aquí lo dejamos. Podemos analizar algunos más, pero vemos que las proporciones no cambian mucho. Es tan imprevisible la aparición de las cifras en los cálculos previos, que al reunir las frecuencias se llega a resultados muy similares.

Aquí tienes una tabla resumen:

	Frecuencias de agrupamiento							
	Todos los números		Cuadrados		Primos		Triangulares	
Tipo 1	279	0%	1	0%	15	0%	4	1%
Tipo 2	66429	66%	208	66%	6387	66%	321	72%
Tipo 3	33292	33%	107	34%	3190	33%	121	27%
Total	100000	100%	316	100%	9592	100%	446	100%

ANEXO

Función para encontrar el tipo de agrupamiento de dígitos

```
Public Function tipoagrupa(n)
Dim i, t, nr, l, maxr, minr
Dim r(20) 'Esta variable contendrá las rachas
Dim sr$, c$, d$

sr$ = Str$(n)
sr$ = Right$(sr$, Len(sr$) - 1) + "$" 'Convierte el número en un string adecuado
nr = 0
maxr = 1: minr = 1000 'Máxima y mínima longitud de racha
For i = 1 To 20: r(i) = 0: Next i
i = 1
l = Len(sr$)
While i < l 'La variable i recorre los dígitos
nr = nr + 1
r(nr) = 1
c$ = Mid$(sr$, i, 1)
d$ = Mid$(sr$, i + 1, 1)
```

While c$ = d$ ‘Un dígito es igual al siguiente. Hay racha mayor que 1
r(nr) = r(nr) + 1
i = i + 1
c$ = Mid$(sr$, i, 1)
d$ = Mid$(sr$, i + 1, 1)
Wend
If r(nr) > maxr Then maxr = r(nr) ‘Toma nota de la racha máxima
If r(nr) < minr Then minr = r(nr) ‘Toma nota de la racha mínima
i = i + 1
Wend

t = 3 'En principio suponemos que el tipo es 3, caso mixto
If minr > 1 Then t = 1 'Tipo 1. Todos agrupados, porque las rachas son mayores que 1
If maxr = 1 Then t = 2 'Tipo 2. Todos aislados y rachas unitarias
tipoagrupa = t
End Function

PROFUNDIZACIONES

MONTONES DE PIEZAS

Mi nieta juega con 9 piezas de construcción sobre un suelo embaldosado. Para ayudarle a organizar objetos le propongo que coloque las piezas en distintas baldosas:

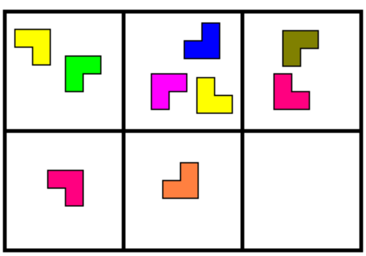
- *¿En cuántas baldosas?*

- *En las que quieras*

- *¿Cuántas piezas pongo en cada baldosa?*

- *Las que quieras.*

La dejo con su tarea y me pongo a calcular. Me interesa saber de cuántas formas ha podido repartir las piezas en las baldosas. Cuando vuelvo me encuentro con esta situación:



Ha utilizado cinco baldosas y ha repartido las piezas como 2+3+2+1+1

No me interesan las posiciones de las baldosas, ni el orden ni los colores; sólo el reparto 9=3+2+2+1+1 (ordeno de mayor a menor para indicar que no me importa el orden)

¿De cuántas formas distintas pudo mi nieta hacer ese reparto?

La solución es 30, pero la teoría en la que se basa necesitará que le dediquemos otro apartado.

Particiones de un número

Se llaman particiones de un número natural N a las distintas formas de descomponerlo en sumandos enteros positivos sin tener en cuenta el orden y admitiendo repetición de sumandos. Para no tener en cuenta el orden se puede exigir que los sumandos sean decrecientes en sentido amplio. Así es más fácil representarlos.

Al número total de particiones de N lo representaremos por la función P(N). Por tanto la afirmación anterior se puede representar como P(9)=30.

En efecto, el 9 se puede descomponer en estas sumas:

9, 8+1, 7+2, 7+1+1, 6+3, 6+2+1, 6+1+1+1, 5+4, 5+3+1, 5+2+2 5+2+1+1, 5+1+1+1+1, 4+4+1, 4+3+2, 4+3+1+1, 4+2+2+1, 4+2+1+1+1 4+1+1+1+1+1, 3+3+3, 3+3+2+1, 3+3+1+1+1, 3+2+2+2, 3+2+2+1+1, 3+2+1+1+1+1 3+1+1+1+1+1+1, 2+2+2+2+1, 2+2+2+1+1+1, 2+2+1+1+1+1+1, 2+1+1+1+1+1+1+1 1+1+1+1+1+1+1+1+1

Son 30 en total

Cada posible suma se puede representar mediante los llamados diagramas de Ferrer, en los que los sumandos se dibujan como conjuntos en filas.

Por ejemplo, 3+2+2+1+1 se puede representar así:

OOO
OO
OO
O
O

Puedes investigar en la Red las propiedades de estos diagramas.

El número de particiones se corresponde con el de soluciones no negativas de la ecuación diofántica

$$1x_1+2x_2+3x_3+\ldots nx_n = N$$

como es fácil demostrar.

También coincide con el de soluciones no negativas de la ecuación diofántica

$x_1+x_2+x_3+\ldots x_n = N$ si se exige que las soluciones formen una sucesión no creciente:

$$x_1>=x_2>=x_3>=\ldots x_n$$

Igualmente, representa también las formas de repartir N objetos indistinguibles en cajas indistinguibles. En la imagen, extraída de una hoja de cálculo, puedes observar la distribución de seis bolas (11 particiones del número 6)

C	C	C	C	C	C
oooooo					
ooooo	o				
oooo	oo				
oooo	o	o			
ooo	ooo				
ooo	oo	o			
ooo	o	o	o		
oo	oo	oo			
oo	oo	o	o		
oo	o	o	o	o	
o	o	o	o	o	o

Más adelante estudiaremos otras funciones de partición condicionada de un número y su cálculo. Mientras tanto te puedes dedicar a comprobar (con piezas, bolitas o lápiz) estos resultados:

N	P(N)
1	1
2	2
3	3
4	5
5	7
6	11
7	15
8	22
9	30
10	42
11	56
12	77

No perderás el tiempo, porque es divertido encontrar estrategias para no olvidar ninguna suma.

Funciones de partición de un número

Hemos llamado P(N) al número de particiones en sumandos decrecientes del número N, pero se pueden definir otras:

Esta definición básica de número de particiones P(N) se puede someter a condicionamientos de los que surgirán nuevas definiciones. Las expresaremos así:

P(N / condicionamiento)

Vemos algunos ejemplos y sus propiedades

Función de partición $P_k(N)$

Es la misma función P(N) condicionada a que sólo intervenga un número K de sumandos:

$P_k(N)$= P(N / k sumandos): Particiones con un número k de sumandos fijado.

Su interés radica en que permite una fórmula de recurrencia para el cálculo de P(N). La demostración se puede consultar en manuales especializados.

$$p_k(n) = \sum_{i=1}^{k} p_j(n-k)$$

Se parte de $P_1(k)$=1 y de $P_k(k)$=1 y se van calculando todos los $P_k(N)$ por recurrencia.

Es claro que después de encontrar los valores de $P_k(N)$ bastará sumarlos todos para k menor o igual a N a fin de obtener P(N), pues la suma abarcaría todas las posibilidades.

El siguiente esquema está copiado de una hoja de cálculo programada para encontrar P(7)

		K	1	2	3	4	5	6	7
N									
1	1		1						
2	2		1	1					
3	3		1	1	1				
4	5		1	2	1	1			
5	7		1	2	2	1	1		
6	11		1	3	3	2	1	1	
7	15		1	3	4	3	2	1	1

Al final de esta entrada puedes leer un código que te puede valer para implementar esta función en una hoja de cálculo.

Función de partición Q(N)

Como la anterior, cuenta el número de particiones, pero en este caso se exige que los sumandos sean todos distintos. Por ejemplo, el entero 7 admite las siguientes particiones como números distintos: 7 = 6+1 = 5+2 = 4+3 = 4+2+1, luego Q(7)=5

Euler demostró que esta función coincide con el número de particiones de n en partes impares.

Código para implementar P(N)

Es válido para Excel y OpenOffice

Public function partic(n)

dim a(40,40) En lugar de 40 puedes escribir un número mayor
dim i,s,h,k

if n=1 then partic=1:exit function
k=n
for i=1 to n
a(1,i)=1 ***a(k,n)*** representa la función P(k,n) explicada más arriba
a(i,i)=1 Se dan valores iniciales
next i

for h=2 to n
for i=2 to h-1
m=h-i
s=0

for j=1 to i:s=s+a(j,m):next j Se implementa la fórmula de recurrencia

a(i,h)=s

next i

next h

For h=1 to n Se van sumando las funciones

s=0

for i=1 to k

s=s+a(i,h)

next i

next h

partic=s

end funcion

Con esta función hemos construido la tabla siguiente

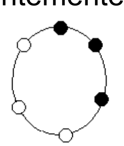
N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P(N)	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42
N	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
P(N)	56	77	101	135	176	231	297	385	490	627
N	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
P(N)	792	1002	1255	1575	1958	2436	3010	3718	4565	5604

¿Te animas?

COLLARES BICOLORES

Introducción

Supongamos que en un hilo cerrado ensartamos **n** cuentas para formar un collar, **r** de ellas de color negro y **s** de color blanco, con **r+s=n**. Lo dejamos sobre una mesa y permitimos todos los giros posibles, lo que evidentemente deja invariante la estructura de las posiciones mutuas



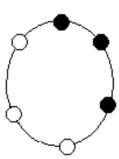
de las blancas y las negras. Por razones de simplicidad (aunque de hecho se hace y está estudiado) prohibiremos cualquier movimiento del collar fuera de la mesa (en el espacio tridimensional)

¿Cómo se estudiarían matemáticamente estas estructuras en forma de collar?

La primera idea es la de que se trata de permutaciones circulares, pero el problema es algo más complicado. Lo abordamos.

Consideremos todas las permutaciones posibles de r negras y s blancas. Sabemos que su número es $C_{n,r}=C_{n,s}$. $=n!/(r!.s!)$ Así, si usamos 3 negras y 3 blancas obtendríamos $C_{6,3}=C_{6,2}= 6!/(3!*3!)= 20$ permutaciones. Si representamos las blancas con una O y las negras con X, resultarían las siguientes (se puede ignorar por ahora la última columna):

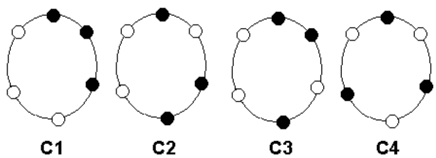
O	O	O	X	X	X	C1
O	O	X	O	X	X	C2
O	O	X	X	O	X	C3
O	O	X	X	X	O	C1
O	X	O	O	X	X	C3
O	X	O	X	O	X	C4
O	X	O	X	X	O	C2
O	X	X	O	O	X	C2
O	X	X	O	X	O	C3
O	X	X	X	O	O	C1
X	O	O	O	X	X	C1
X	O	O	X	O	X	C2
X	O	O	X	X	O	C3
X	O	X	O	O	X	C3
X	O	X	O	X	O	C4
X	O	X	X	O	O	C2
X	X	O	O	O	X	C1
X	X	O	O	X	O	C2
X	X	O	X	O	O	C3
X	X	X	O	O	O	C1



Intenta imaginar cada permutación como circular y agrupa aquellas que representen el mismo collar. Puedes imaginarlas situadas sobre la esfera de un reloj con la primera cuenta en “las doce” y avanzando en el sentido de las agujas. Así lo haremos a partir de ahora.

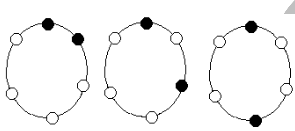
Es un ejercicio muy bueno para dominar el tema. En la última columna de la tabla se han destacado con los símbolos C1, C2,… los distintos collares que se pueden considerar.

Han resultado tres tipos de collares C1, C2 y C3 representados cada uno por 6 permutaciones y luego otro tipo, el C4, representado por dos. Los dibujamos:



Si analizas un poco este conjunto adivinarás por qué el cuarto tipo contiene sólo 2 permutaciones y los otros 6. Por ahora lo dejamos aquí y en la siguiente entrada lo interpretaremos en términos de órbitas en un conjunto sobre el que actúa un grupo.

Mientras tanto, intenta estudiar el mismo tipo de collar pero con sólo dos cuentas negras y cuatro blancas.

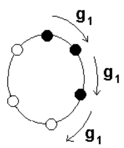


¿Cuántas permutaciones forman cada uno de los tres tipos de collar? ¿Por qué sólo existen tres tipos?

Órbitas y estabilizadores

Llamemos **C** al conjunto de permutaciones de **n** cuentas, **r** de ellas de color negro y **s** de color blanco, con **r+s=n.** En total existirán **Cn,r=Cn,s** elementos**.** Con las condiciones que se impusieron en la anterior entrada en la definición de un collar se advierte que vamos a someter a ese conjunto C a una serie de giros, y que consideraremos pertenecientes a un mismo collar a las permutaciones que se pueden convertir una en la otra mediante un giro.

Concretamos:



Llamemos $\mathbf{g_1}$ al giro que traslada cada cuenta al lugar de su siguiente en el sentido de las agujas del reloj. En términos de permutaciones equivaldría a mover cada elemento un lugar y al último convertirlo en primero. Así, en la permutación XOXXO el efecto de g_1 sería OXXOX. Se puede formalizar más, pero así se entiende bien. Esta definición es independiente del número de cuentas.

Igualmente, llamaremos g_2 a la composición de g_1 consigo mismo, es decir $g_2(x)= (g_1.g_1)(x)=g_1(g_1(x))$. En la práctica equivaldría a un giro doble. De igual forma podemos definir el giro triple $g_3(x)= (g_1.g_2)(x)=g_1(g_2(x))$ y así sucesivamente hasta llegar a g_n que equivaldría a la transformación identidad e.

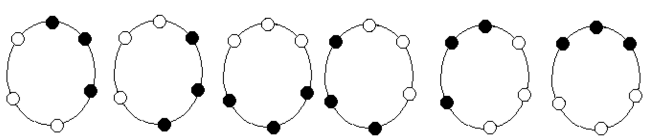
Hemos definido en realidad un grupo G (puedes demostrarlo), el de los giros en C, subgrupo del de sustituciones de C. Formalizamos la idea.

Diremos que un grupo G actúa sobre un conjunto C cuando para cada elemento g de G se define una operación externa g(x)=y, donde x e y son elementos del conjunto C, tal que cumpla e(x)=x y además (g.f)(x)=g(f(x)), ambas para todo x de C. En nuestro caso de giros sobre permutaciones se cumplen ambas, luego diremos que G actúa sobre C. La imagen intuitiva es que se hacen girar las cuentas de todas las formas posibles.

Dos conceptos importantes se desprenden de esa definición

Órbita

Llamaremos **órbita o trayectoria** de un elemento x del conjunto C sobre el que actúa G, al conjunto **orb(x)** formado por todas las imágenes posibles de x mediante los elementos de G. En la imagen tienes un ejemplo de órbita según los giros en un conjunto de seis cuentas.



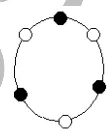
Las órbitas no son subgrupos, sino subconjuntos de C. Si vuelves a leer desde el principio, entenderás que la definición de “collar” coincide con la de “órbita”

Los collares que hemos definido coinciden con las órbitas de las permutaciones si sobre ellas actúan los giros.

Hay otra definición de collar en la que entran las simetrías, pero lo dejamos por si deseas ampliar el tema.

Estabilizador

Para una permutación cualquiera x, llamaremos estabilizador de x **est(x)** al subgrupo de giros que lo dejan invariante, es decir, todos los g tales que g(x)=x. Es fácil demostrar que est(x) constituye un subgrupo.



C4

Así, el estabilizador de la permutación de la imagen está formado por el subgrupo {e, g_2, g_4}. Si no ves simetrías aparentes en una permutación, es fácil que su estabilizador sea {e}, sólo la identidad. Repasa algunos ejemplos y verás que es fácil encontrar su estabilizador.

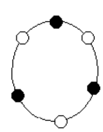
¿Por qué hablamos de estabilizadores? Porque nos sirven para contar órbitas o, lo que es lo mismo, collares.

Conteo de collares

Los conceptos de órbita (collares en nuestro caso) y de estabilizadores está relacionados por un cálculo. Si representamos como |C| al cardinal de un conjunto C, tendremos que
Si G actúa sobre un conjunto C, para cada elemento x de C se cumple que

|Orb(xl|=|G|/|est(x) |

Es decir, el cardinal de la órbita de x equivale al cociente del cardinal del grupo que actúa sobre él y el de su estabilizador. Así, en el ejemplo de la imagen, el grupo de



C4

giros tiene cardinal 6 y en párrafos anteriores vimos que su estabilizador tiene 3, luego su órbita contendrá 6/3=2 elementos, el de la imagen y su simétrico intercambiando negras y blancas.

En los collares con **n** primo no existen subgrupos propios, luego todos los collares tendrán n elementos equivalentes. Estudia los collares de siete elementos y lo comprobarás.

Hay una forma de contar todos los collares mediante órbitas y estabilizadores. Se trata del lema o teorema de Burnside:

Sea G un grupo que actúa sobre un conjunto C, y llamemos r(g) al número de elementos de C que quedan invariantes respecto a g (x=g(x)). En ese caso el número de órbitas en C viene dado por

$$O_G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} r(g)$$

Puedes consultar la demostración en textos adecuados.

Lo aplicamos al caso de collares de 6 cuentas, 3 negras y 3 blancas. Contamos los puntos fijos de cada giro:

e: Todos los elementos son fijos, contamos 20 elementos

g_1, g_3, g_5: No tienen elementos fijos

g_2, g_4: Cada uno presenta 2 elementos fijos. Contamos 4

Aplicamos el teorema de Burnside: O=(20+0+4)/6 = 4 órbitas, tal como sabíamos desde el principio. Encontramos cuatro collares distintos.

En el caso que propusimos de 2 cuentas negras y 4 blancas tendríamos:

Número total de elementos: 6!/(2!.4!)= 15 permutaciones

e: Todos los elementos son fijos, contamos 15 elementos

g_1, g_2, g_3, g_5: No tienen elementos fijos

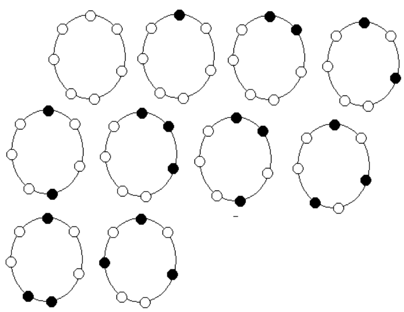
g_3: Presenta 3 elementos fijos.

Luego O=(15+0+3)/6 = 3 órbitas, que se corresponden con los propuestos en nuestra primera entrada.

Puedes estudiar el caso sencillo de collares de 4 cuentas. Desarrolla por separado los casos de 3 de un color y 1 del otro o el de 2 colores de cada clase. Te deben resultar un collar del primer tipo y dos del segundo. Dibújalos si quieres.

En el caso de 7, al ser primo, no hay puntos fijos y el cálculo se reduce a dividir entre 7 el número de permutaciones. Por ejemplo, si $C_{7,4}=C_{7,3}=35$, el número de collares será igual a 35/7 = 5. En el caso de 5 y 2 serían 3=21/7

Ahí los tienes todos



Son 10 en total, y si le añadimos los que resultan de intercambiar negras y blancas, se convierten en 20. Este resultado y otros similares los puedes encontrar en http://oeis.org/A000031

Conteo total

Seguimos con el tema de collares, pero sólo aquellos que están sometidos a giros planos, sin tener en cuenta simetrías. Hemos indicado que este otro caso, algo más complejo, lo dejamos como complemento.

Descubrimos en la entrada anterior que para n=7 existían 20 collares distintos, e igualmente se podría haber razonado que para n=6, caso que hemos estudiado exhaustivamente, serían 14.

Si consultas http://oeis.org/A000031 verás que los resultados son

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
C	1	2	3	4	6	8	14	20	36	60	108	188

Existe una fórmula, que puedes consultar en http://mathworld.wolfram.com/Necklace.html para calcular esos números sin acudir a un análisis individual de cada collar. Es esta, adaptada al caso de 2 colores:

$$C(n) = \frac{1}{n}\sum_{d:n} \varphi(d) 2^{n/d}$$

La variable d recorre todos los divisores de n desde 1 hasta n, y φ(d) es la función indicador de Euler que indica el total de números menores que d y primos con él incluido el 1.

Apliquemos la fórmula al caso 6:

Divisores: 1,2,3,6

Indicadores: φ(1)=1, φ(2)=1, φ(3)=2, φ(6)=2

Total: $C=(1*2^6+1*2^3+2*2^2+2*2^1)/6=(64+8+8+4)/6=84/6=14$, como ya sabíamos.

En el caso de 7:

Divisores:1,7

Indicadores: φ(1)=1, φ(7)=6

Total: $C=(1*2^7+6*2^1)/7 = (128+12)/7 = 140/7 = 20$, que también coincide.

Y aquí acabamos. El resto es cosa tuya. Puedes llegar por este camino hasta el Teorema de Enumeración de Polya.

LO TENGO REPE

Mi nieta y sus amigas ya tienen edad para coleccionar cromos. Así que las hemos visto repetidamente pasar del entusiasmo de los primeros días -“No lo tengo, no lo tengo, este tampoco”-, a las medias desilusiones de los últimos –“Repe, otro repe, este lo tengo, pero no pasa nada, me pondré a cambiar…, o lo regalo”-. Al final, los padres se van al Rastro o piden a las distribuidoras los cromos que faltan. Siempre ha sido así, al menos desde que éramos niños los que ahora somos abuelos.

Este proceso de evolución de la esperanza en obtener un nuevo cromo ha interesado a especialistas y divulgadores, especialmente al explicar las simulaciones. Recuerdo con mucha nostalgia un artículo de Ricardo Aguado, Agustín Blanco y Ricardo Zamarreño, compañeros en los tiempos heroicos (años 80) de introducción de los ordenadores en la enseñanza.

http://www.doredin.mec.es/documentos/00820073007308.pdf

Ellos simularon la evolución de la colección de cromo en cromo, y con una ampliación para el caso de dos coleccionistas que intercambian.
He visto también alguna simulación sobre cromos con MINITAB, pero ninguna con hoja de cálculo. Quien siga este blog sabrá ya que eso es motivo suficiente para que se emprenda en él otra nueva tarea.

Aquí estudiaremos la evolución de sobre en sobre, que es como verdaderamente se compran los cromos y consideraremos una sola colección sin intercambio con otras.

Primera aproximación

Si se tienen ya **K** cromos y la colección consta de **N**, la probabilidad de que obtengas **h** cromos nuevos en un sobre que trae **m** es, **en primera aproximación**, de tipo binomial. En efecto, se trata de obtener **h** éxitos en **m** intentos dentro de una variable dicotómica (REPE-NO REPE). Pero de esta forma hemos hecho una pequeña trampa, que es suponer que la probabilidad **permanece constante** mientras sacas cromos del sobre, y eso no es así, pues cualquier cromo no repetido altera la situación, pero ya hemos advertido que es una aproximación para abrir camino. Después pasaremos a una simulación exacta.

Con esta idea, si la probabilidad de que no tengamos un cromo que saquemos del sobre es **p=(N-K)/N**, la esperanza matemática de obtener **m** cromos nuevos será, según la teoría de las distribuciones binomiales, **E=mp**. En cada sobre esperamos obtener E cromos.
(ver http://hojamat.es/estadistica/tema6/teoria/teoria6.pdf)

En esa idea nos basaremos para construir con la hoja de cálculo un modelo aproximado: para cada sobre hallaremos las probabilidades de que salga repetido o no, calculamos E y vamos acumulando. El gran problema de este estudio es que cada cromo nuevo que incorporemos a la colección hace variar la probabilidad **p**, por lo que tendremos que ir calculando de sobre en sobre. De ahí la utilidad de una hoja de cálculo, aunque, al ser las operaciones bastante simples, se puede usar una calculadora.

Una forma de abordar el tema es construyendo una función de cuatro variables:

```
Public Function paso_med(total, tengo, sobre, compra)
Dim i, salen
For i = 1 To compra
salen = sobre * (total - tengo) / total
tengo = tengo + salen
Next i
paso_med = Int(tengo)
End Function
```

Los parámetros son TOTAL, que es el número de cromos de la colección completa, TENGO, los que ya tengo, SOBRE, los que vienen en cada sobre y COMPRA, los sobres que compro. Para llegar al resultado (insistimos, aproximado y estimativo), se recorren los sobres uno a uno, se le estima la media de no repetidos (variable SALEN) y se acumula a los que tengo. Todo el cálculo se recoge en el resultado PASO_MED.

Con esta función puedes construir una tabla de evolución de la colección. Parte de un inicio, que puede ser de 0 cromos, y vas usando de forma recurrente la función anterior hacia abajo, saltando cada vez el número de sobres que desees. Así lo hemos hecho en esta tabla, contando también los cromos comprados y los que salen repetidos:

Sobre	Total	Sobres en cada compra
5	250	10

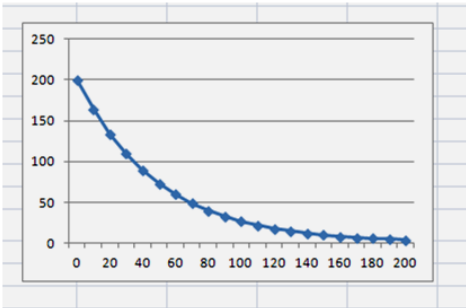
Sobres	Salen	Compro	Repes	Faltan
0	0	0	0	250
10	45	50	5	205
20	82	100	18	168
30	112	150	38	138
40	137	200	63	113
50	157	250	93	93
60	174	300	126	76
70	187	350	163	63
80	198	400	202	52
90	207	450	243	43
100	214	500	286	36
110	220	550	330	30
120	225	600	375	25
130	229	650	421	21
140	232	700	468	18
150	235	750	515	15
160	237	800	563	13
170	239	850	611	11
180	241	900	659	9

Si consideramos terminada una colección cuando faltan por tener menos de 10 cromos (en ese momento suele aparecer la decisión paterna de comprar los que quedan), según este ejemplo, que no anda muy descaminado, hay que comprar unos 180 sobres en lugar de los 50 que en este caso constituirían el número mínimo, es decir un 360% sin contar los últimos. Si quisiéramos aproximarnos al último cromo sería necesario comprar más del 500%

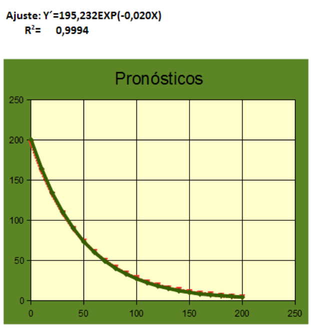
De todas las columnas nos fijaremos en primer lugar en la última

Evolución de los cromos que faltan por tener

Si representamos gráficamente el número de cromos que van faltando en cada compra, obtenemos una gráfica de siguiente tipo



No constituye ninguna sorpresa. Sabemos que el incremento (negativo) del número de los que nos faltan va decreciendo alarmantemente con cada compra. Tampoco nos asombrará el que se ajuste bien a una función exponencial, ya que la probabilidad de disminuir el número de cromos que nos faltan es aproximadamente proporcional a dicho número, en virtud de la probabilidad **p=(N-K)/N.**



Hemos ido cambiando los parámetros TOTAL y SOBRE, comprobando que una función del tipo

$$FALTAN(X) = TOTAL \cdot e^{(-SOBRE/TOTAL)X}$$

donde X es el número de sobres comprados, se ajusta bastante bien al proceso, como puedes observar en el siguiente ajuste realizado con un total de 200 cromos cuando entran 4 en cada sobre.

Acumulación de repetidos

Si tienes el dato de los que te faltan, también sabes los repetidos que te han salido. Su fórmula aproximada sería:

$$REPES(X) = SOBRE \cdot X - TOTAL \cdot \left(1 - e^{(-SOBRE/TOTAL)X}\right)$$

Te dejamos que razones este resultado. La gráfica de los repes tiene como asíntota y=SOBRE.X-TOTAL. Es fácil de ver: los cromos que ya tengo se acercan poco a poco al TOTAL y SOBRE.X representa los que ya he comprado, luego es lógico que los repetidos se acerquen a su diferencia.

¿Y si quisiéramos llegar a los últimos cromos?

Sin cambiar ni comprar podríamos llegar a un proceso infinito de compra. Por eso, lo lógico es detenerse cuando ya faltan diez o doce cromos y acudir a la compra directa.

Hemos introducido la función inversa (también aproximada), por la que sabiendo los cromos que ya tengo y los que quiero, te devuelve el número de sobres que necesitas comprar por término medio.

Su código es

```
Public Function compra_med(total, tengo, sobre, quiero)
Dim i, salen, t
i = 1
t = 0
While tengo < quiero
salen = sobre * (total - tengo) / total
tengo = tengo + salen
i = i + 1
Wend
compra_med = i
End Function
```

Con ella se llega a resultados muy interesantes. En la siguiente tabla se recogen los sobres de cinco cromos que se tendrían que comprar en una colección de 250, partiendo de cero, para llegar a 240, 245 o incluso 249 (con 250 podría llegar a un bucle sin salida). En teoría, si no salieran repetidos, serían 50 sobres, pero en la realidad, observa…

Colección de 250 cromos en sobres de 5

Paro de comprar en	Sobres que he de comprar	Porcentaje respecto al mínimo
240	161	322%
245	195	390%

247	220	440%
248	240	480%
249	275	550%

Al último resultado ya llegaron los autores citados arriba: necesitas comprar más de cinco veces el número mínimo de sobres necesario. También llama la atención que para que sólo te falten 10 debas comprar el 322%. Es todo un aviso a los papás.

¿Qué exactitud tendrá todo esto? Pues ahora efectuaremos una simulación cromo a cromo y realizaremos series para ver si se confirman estos resultados.

Simulación de una colección de cromos

En esta segunda parte intentaremos acercarnos algo más al problema mediante una simulación cromo a cromo. Seguiremos pensando en términos de sobres completos, pero simularemos la aparición de cada cromo individualmente.

15	*Simulación*	
16	Cromos que ya tengo	
17	1	4
18	2	10
19	3	4
20	4	4
21	5	3
22	6	1
23	7	1
24	8	3
25	9	5
26	10	2
27	11	2
28	12	2

Una de las ventajas que tiene la hoja de cálculo es que toda ella es una matriz de datos, con lo que nos ahorramos dimensionar variables tipo array, ya que las tenemos delante de nuestra vista.

Para simular una colección de cromos, lo primero que confeccionaremos es una lista de ellos numerados del 1 al total de la colección. Posteriormente figurarán junto a ellos el total de repetidos que nos han salido.

En la imagen se ha elegido la columna A para la lista de cromos y la B para sus frecuencias de aparición.

Una vez preparada la lista, procederemos a simular la apertura de un sobre. No cansaremos a los lectores con códigos, pero sí señalaremos que los pasos de simulación necesarios son:

- Se simula la aparición de cada cromo nuevo. Suponemos que no hay malicia en la distribuidora y que todos van saliendo de forma equiprobable.
- Una vez tengamos el sobre simulado, desecharemos aquellos conjuntos en los que hay cromos repetidos, porque parece ser que esto no suele ocurrir.

- Admitida la composición del sobre, recorreremos la lista de los cromos que ya tenemos. Si su frecuencia es cero, los consideramos nuevos y se incorporan a la lista de los que tenemos y en caso contrario se consideran repetidos. En ambos casos se incrementa la frecuencia.
-

Este proceso va bastante rápido, y se puede observar la composición de cada sobre nuevo y la evolución de la lista.

Simulación

Cromos que ya tengo		Sobre	Tengo	Me faltan	Repes	Máximo repe
1	3	60	238	12	662	9
2	2	57				
3	4	158				
4	3	196				
5	2	230				

Como observarás en la imagen, se pueden crear contadores para ver los cromos que vamos teniendo, los que nos faltan y los repetidos. También, aunque después no lo hemos visto muy interesante, la máxima frecuencia de repetición que se observa en la simulación. En la imagen vemos que un cromo al menos ha aparecido 9 veces.

En la dirección ***hojamat.es/blog/cromos.xlsm*** tienes la hoja de Excel que contiene esta simulación. En la parte superior se puede realizar el estudio por medias de la primera parte y en la inferior, además de simular la compra de X cromos, es posible planificar una serie de simulaciones para equilibrar los resultados. Si la descargas, recuerda que los datos para la simulación son los de la parte superior.

Aquí nos limitaremos a presentar los resultados.

¿Confirma la simulación los resultados aproximados del estudio por medias?

Pues en gran parte sí. En la siguiente tabla comparamos los datos obtenidos por medias binomiales en la entrada anterior y los procedentes de series de 50 simulaciones cada una.

Sobre	Total	Sobres en cada compra
5	250	10

Sobres	Medias	Simulación	Diferencia

0	0	0	0
10	45	45,74	0,74
20	82	83,64	1,64
30	112	114,52	2,52
40	137	137,96	0,96
50	157	159,16	2,16
60	174	176,78	2,78
70	187	190,56	3,56
80	198	201,82	3,82
90	207	208,96	1,96
100	214	216,38	2,38
110	220	223,22	3,22
120	225	227,82	2,82
130	229	232,22	3,22
140	232	235,26	3,26
150	235	238,18	3,18
160	237	239,82	2,82
170	239	242,38	3,38
180	241	243,54	2,54

Las diferencias son muy pequeñas, nunca superiores a 4 cromos, lo que da validez a la aproximación por medias, teniendo en cuenta que tampoco la simulación tiene carácter exacto (aquí todo es azar).

También aquí son bastante aproximadas las funciones exponenciales que creamos para explicar la evolución de la colección.

Hay un punto interesante: La esperanza de obtener cromos nuevos en cada sobre es ligeramente superior a la que nos daría la fórmula **E=mp** de la media binomial con probabilidad constante. Esto es debido a que cada cromo que aparece, si no lo tenemos, disminuye la probabilidad del siguiente y aumenta la de obtener el siguiente repetido. Si nos sale repetido, no altera las probabilidades, porque lo guardamos en otra parte. Hemos usado este hecho para estudiar todos los casos que se pueden dar en la apertura de un sobre de 4 cromos en una colección de 200 si ya tenemos 72. Si lees la tabla es natural que te "marees", porque no es fácil seguir cada caso, pero al final resulta que la media bien calculada es un 1,3% superior a la obtenida sin cambiar las probabilidades:

							p	n	p*n
Colección	128	127	126	125		256032000	0,16002	4	0,64008
200	128	127	126	75		153619200	0,096012	3	0,288036
Sobre	128	127	74	126		151570944	0,0947318	3	0,2841955
4	128	127	74	74		89017856	0,0556362	2	0,1112723
Tengo	128	73	127	126		149522688	0,0934517	3	0,280355
72	128	73	127	74		87814912	0,0548843	3	0,164653
Faltan	128	73	73	127		86628224	0,0541426	2	0,1082853
128	128	73	73	73		49794176	0,0311214	1	0,0311214
	72	128	127	126		147474432	0,0921715	3	0,2765146
	72	128	127	73		85441536	0,053401	2	0,1068019
	72	128	73	127		85441536	0,053401	2	0,1068019
	72	128	73	73		49112064	0,030695	1	0,030695
	72	72	128	127		84271104	0,0526694	2	0,1053389
	72	72	128	73		48439296	0,0302746	1	0,0302746
	72	72	72	128		47775744	0,0298598	1	0,0298598
	72	72	72	72		26873856	0,0167962	0	0
						1598829568	0,9992685		**2,5942852**
							E=n*p		**2,56**
							Incremento		**1,3%**

De este orden son las diferencias entre las dos tablas que hemos confeccionado, por lo que una valida a la otra.

¿Se atreve alguien a sacar una fórmula algebraica que resuma esta tabla? Yo no, pero parece que alguien ha obtenido algo similar.

Resumen de hechos notables

Destacamos algunos hechos observados con ambos métodos (media binomial y simulación) y dejamos que los lectores intenten justificarlos con los medios que les hemos propuesto.

(1) Si compras el mínimo de sobres de una colección (cociente entre el TOTAL y el SOBRE) sólo conseguirás completar un 63% de la misma (en realidad, unas décimas más, entre 63,2% y 63,8% aproximadamente según los casos. Cerca del valor de 1-1/e ¿por qué?)

(2) El momento de compra en el que se igualan el número de cromos que tienes con los que te faltan (mitad de la colección) es cuando has adquirido el 69% de los cromos. (cerca del valor de 100*LN(2) ¿de dónde sale esa estimación?). Los papás se han gastado un 19% más de lo previsto. A partir de ahora saldrán más repetidos que nuevos.

(3) Un momento crítico ocurre cuando al abrir sobres nuevos hay una gran posibilidad de que todos sus cromos estén ya repetidos. Esto se dará cuando la esperanza E en un sobre no llegue a la unidad. Una fórmula aproximada para encontrar ese punto crítico es

$$X = TOTAL \cdot \frac{Ln(SOBRE)}{SOBRE}$$

Por ejemplo, en una colección de 240 cromos que vienen en sobres de 6, cuando lleves comprados 71 sobres comenzarán los problemas.

(4) Por último, una fórmula medio empírica para relacionar el porcentaje de la colección **P** que deseas alcanzar y los sobres comprados:

$$X = -\frac{TOTAL}{SOBRE} Ln(1-P)$$

Si la aplicas, no te asustes, y piensa en ir cambiando cromos.

Estos cálculos los hemos comprobado con la simulación y en realidad son algo más favorables, por ese 1,3% de diferencia que existía entre calcular por medias y simular.

NÚMEROS DIGITALMENTE EQUILIBRADOS

Números digitalmente equilibrados en base 10

Si se efectúa una búsqueda por Internet con la expresión "balanced number" aparecen muchos sentidos distintos para el calificativo "equilibrado" referido a los números naturales. Unos son más simples que otros y algunos se refieren a una clase especial de números, como los primos o los triangulares. Todos ellos tienen en común que nos permiten un desarrollo en este blog, ya que el uso de algoritmos sencillos y de una hoja de cálculo permitirá aclarar algunos conceptos.

Resumiendo, nos hemos encontrado con estos significados de la palabra "equilibrado":

Con cifras

Un número es equilibrado en un sistema dado de numeración si (distintas definiciones):

(a) Todos sus dígitos aparecen con la misma frecuencia. Es popular el caso del sistema binario, en el que se exige que aparezcan el mismo número de 1 que de 0.

(b) Aparecen todos los dígitos posibles una vez.

(c) Posee el mismo número de dígitos pares que impares, o bien los pares figuran un número impar de veces y los impares un número par.

(d) Números de tres cifras en las una de ellas es promedio de las otras.

(e) Los primeros n dígitos tienen la misma suma que los n siguientes (en números de 2n cifras)

Con clases especiales de números:

(a) Primo equilibrado es aquel que es promedio de su primo anterior y el siguiente. Esta definición se puede extender a otras clases de números.

Habrá más casos definidos, pero con estos tenemos suficiente para trabajar un poco. No quiere decir que se desarrollen todos. En el momento de escribir esto no hemos concretado nada. Llegaremos hasta donde el cansancio o el aburrimiento nos dejen.

Comenzamos hoy con el primer caso: “Todos sus dígitos aparecen con la misma frecuencia”. Para no perder generalidad usaremos como parámetro la base de numeración. Esto nos exige que los algoritmos que usemos no se basen en el valor de los dígitos, sino en su representación tomando las cifras como símbolos.

Si en una base dada de numeración un número se representa con unos dígitos tomados todos con la misma frecuencia, diremos que es “digitalmente equilibrado” Por ejemplo, 172712 es equilibrado en base 10 y 50 lo es en base 3, ya que $50_{(10}=1212_{(3}$, equilibrado en el 1 y el 2.

Estudiaremos algunas cuestiones sobre ellos

- Número total de equilibrados con un número dado de cifras.
- Función que nos devuelva si un número es equilibrado o no.

- Uniremos después los dos conceptos para comprobar cálculos o para averiguar cuantos equilibrados hay en un intervalo.

Si tomamos un número de dígitos determinado (divisor en este caso del total de dígitos), el número de posibles equilibrados no es difícil de calcular, pues es una cuestión combinatoria. En el caso de no concretar qué dígitos son, las formas equilibradas de llenar un número de m cifras con n dígitos equilibrados será un caso de permutaciones con repetición, en el que cada dígito se repite m/n veces. Lo representaremos con la función FEQ (formas equilibradas de aparecer). Su expresión es fácil de conseguir:

$$FEQ(m,n) = \frac{m!}{(m/n)!^n}$$

Por ejemplo, con 6 dígitos en total y el uso de sólo 3 resultarán

FEQ(6,3)=(6!)/(6/3)!^{3} =720/8=90 formas

En el caso del ejemplo lo hemos comprobado con nuestra hoja Combimaq, resultando, efectivamente, 90 casos

3	3	1	2	2	1		**87**
3	3	2	1	1	2		**88**
3	3	2	1	2	1		**89**
3	3	2	2	1	1		**90**

Desarrollo de esta función con hoja de cálculo

Con este código se evita el uso de factoriales:

```
Function feq(m, n)
Dim q, i
Dim a, p

q = m \ n: If q <> m / n Then feq = 0: Exit Function
a = m: p = a

For i = 1 To n
For j = q To 2 Step -1
```

```
vale = False
While Not vale
If p / j = p \ j Then
p = p / j: vale = True
Else
a = a - 1: p = p * a
End If
Wend
Next j
Next i

If a > 1 Then For i = a - 1 To 2 Step -1: p = p * i: Next i
feq = p
End Function
```

Estas son las formas de aparecer, pero existe otra variable, y es el número de dígitos totales que usaremos. En el ejemplo hemos usado implícitamente los dígitos 1, 2, 3, pero pueden ser otros. Si deseamos estudiar el problema en base diez, esos serían los dígitos totales a considerar. Por tanto, la función FEQ se deberá multiplicar ahora por todas las combinaciones de k dígitos tomados de n en n. Es decir, el número total, NEQ será

$$NEQ(m,n,k)=\frac{m!}{(m/n)!^n}\binom{k}{n}$$

Nótese que k ha de ser mayor o igual que n, lo que producirá algunos huecos en la distribución de estos números equilibrados. Lo veremos en otra entrada.

Desafortunadamente este valor incluye el cero como primer dígito en algunos casos, por lo que lo que solemos entender siempre como número de dígitos se puede falsear, pero el resultado es bastante aproximado al del uso común. La solución pasa por considerar sólo tramas de números con el mismo número de dígitos. Lo vemos:

Por ejemplo, desde 1000 hasta 9999 (cuatro dígitos), existen 4788 equilibrados (ya veremos más adelante cómo se han contado), y esta fórmula, aplicada a m=4, n=1, 2 o 4 (sus divisores) y k=10 nos da como resultado

NEQ(4;4;10)+NEQ(4;2;10)+NEQ(4;1;10) = 5040+270+10= 5320

La discrepancia consiste en que este segundo cálculo incluye ceros a la izquierda, y el otro no. Por tanto, bastará repartir 5320 entre 10 dígitos y después multiplicar por 9:

5320*9/10 = 4788

Algoritmo para distinguir si un número es digitalmente equilibrado.

Lo construiremos para bases de numeración entre 2 y 16, pues los casos de bases mayores no tienen el mismo interés. Trabajaremos con caracteres, y no con números, para poder usar los dígitos ABCDEF del sistema hexadecimal. Disponemos desde hace tiempo de la función que expresa un número en cualquier base. Por si no la hemos publicado nunca, la copiamos aquí. Es el primer paso para averiguar si un entero es equilibrado o no, expresarlo en una base dada:

```
Public Function exprebase(n, b) As String

Dim c$(16)
Dim m, p, r
Dim expre$

c$(0) = "0"
c$(1) = "1"
c$(2) = "2"
c$(3) = "3"
c$(4) = "4"
c$(5) = "5"
c$(6) = "6"
c$(7) = "7"
c$(8) = "8"
c$(9) = "9"
c$(10) = "A"
```

```
c$(11) = "B"
c$(12) = "C"
c$(13) = "D"
c$(14) = "E"
c$(15) = "F"
c$(16) = "G"

expre$ = ""
m = n

While m > 0
p = Int(m / b)
r = m - p * b
expre$ = c$(r) + expre$
m = p
Wend

exprebase = expre$
End Function
```

No la explicamos con detalle. Basta recordar la forma de pasar un número de base decimal a otra base. Lo importante es que para saber si un número es equilibrado hemos de usar sus dígitos uno a uno, y esta función lo consigue.

Una vez expresado un número en la base deseada, el problema de saber si es equilibrado o no es una cuestión de estructura de un conjunto de símbolos, independientemente de si son números o no. El algoritmo para averiguarlo puede ser el siguiente (en Basic de las hojas de cálculo):

(Está preparado para bases del 2 al 16, las más usuales, y no más de 16 dígitos)

```
Public Function esequilibrado(n, b) As Boolean ‘n es el número y b la base
Dim c(17)  ‘memorias para recoger los contadores de dígitos
Dim i, nc, co, cc, j
Dim s$, ca$
Dim esq As Boolean

For i = 0 To 16: c(i) = 0: Next i  ‘Pone las memorias a cero
s$ = exprebase(n, b)  ‘Expresa el número en la base dada, como cadena de caracteres
nc = Len(s$)

For i = 1 To nc  ‘Recorre todos los dígitos
ca$ = Mid$(s$, i, 1)
co = Asc(ca$) ‘carácter a estudiar
If co >= 48 And co <= 57 Then co = co – 47 ‘Convierte símbolos en códigos del 1 al 16
If co >= 65 And co <= 70 Then co = co - 54
c(co) = c(co) + 1  ‘Añade el código a su memoria
Next i
es = True
j = 1
While c(j) = 0: j = j + 1: Wend ‘se salta las memorias vacías
i = j
cc = c(j)
While es And i <= 16
If c(i) > 0 And cc <> c(i) Then es = False ‘Si dos frecuencias son distintas, ya no es equilibrado
i = i + 1
Wend
esequilibrado = es
End Function
```

Con esta función podemos crear listas de números equilibrados. Aquí tienes los primeros en base 2:

Número	En base 2
1	1
2	10
3	11
7	111
9	1001
10	1010
12	1100
15	1111
31	11111
35	100011
37	100101
38	100110
41	101001
42	101010
44	101100
49	110001
50	110010
52	110100
56	111000
63	111111

También se puede usar una función de N que cuente los equilibrados hasta N. Podría ser esta:

```
Public Function ceq(m, n)
Dim i, c
c = 0
For i = 1 To m
If esequilibrado(i, n) Then c = c + 1
Next i
ceq = c
End Function
```

No necesita explicación.

Equilibrados en base 10

Con la función CEQ podemos investigar cuántos equilibrados existen en base 10 en los distintos tramos de números:

Hasta el 99 todos son equilibrados. Lo son los de una cifra, y todos los de dos. Basta recorrerlos.

El 100 es el primer número no equilibrado en base 10.

En cada centena del 100 al 1000 aparecen 73 equilibrados, o lo que es lo mismo, hay 27 que no lo son. La razón es clara: el primer dígito es obligado en una centena, y un número será equilibrado si todos sus dígitos son iguales, es decir, un solo caso (por ejemplo, de 300 a 400 será el 333), o bien todos son diferentes, y como tenemos uno obligado, los otros dos aparecerán de 9*8=72 formas distintas, lo que suma 73.

Así que del 100 al 1000 contaremos 73*9=657 equilibrados. Ya llevamos del 1 al 1000 657+99=756. Compruébalo con la función CEQ(1000;10)=756

Observa cómo resultaría el 73 de la función NEQ:

(NEQ(3;3;10)+NEQ(3;1;10))/10 = (720+10)/10=73

En cada millar aparecen 532 equilibrados

Para reproducir este número usamos la función NEQ:

$$NEQ(m,n,k) = \frac{m!}{(m/n)!^n}\binom{k}{n}$$

Ahora bastará aplicarla a m=4, n=4,2,1 (divisores del 4) y k=10:

NEQ(4,4,10)+NEQ(4,2,10)+NEQ(4,1,10)=5040+270+10=5320, y como en cada tramo el primer dígito es obligado, dividiremos entra 10, quedando 5320/10=532.

El mismo desarrollo admitirían los tramos de 10000 en 10000. Dejamos solo el desarrollo numérico:

NEQ(5,5,10)+NEQ(5,1,10)=30240+10=30250 y dividiendo entre 10: 3025 por tramo.

Lo puedes comprobar en un tramo concreto con la función que cuenta equilibrados:

CEQ(30000;10)-CEQ(20000;10)=11594-8569=3025

Comprueba que los tramos de 100000 poseen 16291 equilibrados.

Hemos descubierto que la función que cuenta los equilibrados menores o iguales a un número en base 10 es lineal a trozos, pues presenta el mismo incremento en los tramos que poseen igual número de cifras.

Otros números digitalmente equilibrados

Equilibrados en otras bases

Estudiábamos en la anterior entrada los números digitalmente equilibrados en base 10. Descubrimos que su distribución es lineal en tramos entre múltiplos de potencias de 10, y presentamos funciones para descubrir si un número es equilibrado o no y poder contarlos. Ampliamos ahora el concepto a digitalmente equilibrados en otras bases.

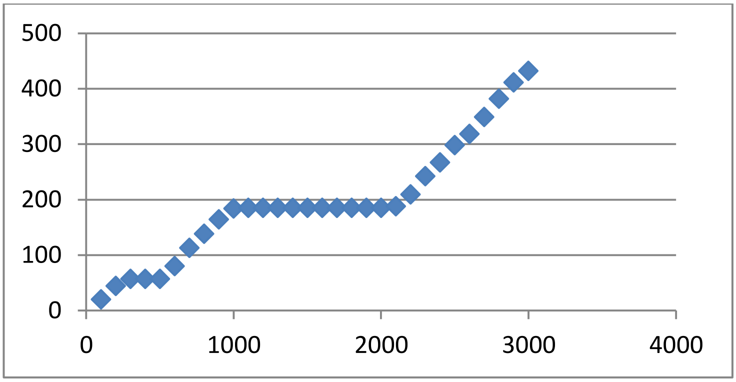
Equilibrados binarios

Serán aquellos que presenten los unos y ceros con la misma frecuencia (y también todo unos o todo ceros). Seguimos aquí con el problema de los ceros a la izquierda, que no nos deben confundir. Con la función presentada en la anterior entrada, esquilibrado(N,2) podremos encontrar los primeros:

N	Exprebase(N,2)
1	1
2	10
3	11
7	111
9	1001
10	1010
12	1100
15	1111
31	11111
35	100011
37	100101
38	100110
41	101001
42	101010
44	101100
49	110001
50	110010
52	110100

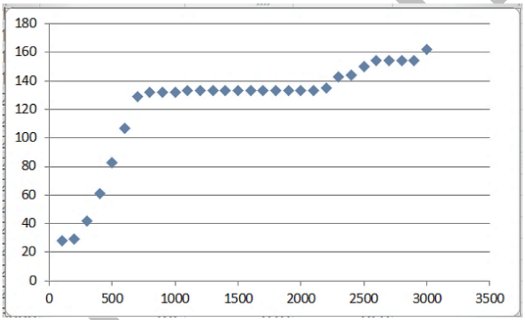
Vemos que presentan o todo 1 o la mitad 1 y la otra mitad 0. Obsérvese que este concepto es más general que el presentado en http://oeis.org/A031443

Si contamos los equilibrados anteriores a un número con la función CEQ (ver entrada anterior) observamos que la distribución es lineal a trozos, con intervalos constantes. Lo vemos en el siguiente gráfico, construido sobre periodos de 100 en 100:

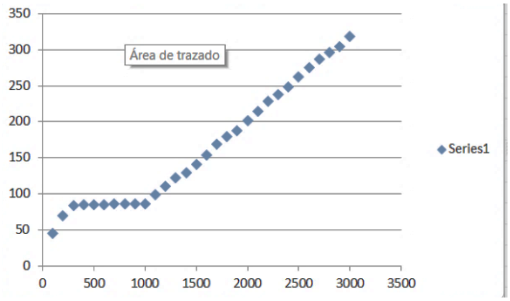


Los periodos constantes se corresponden con intervalos que van desde una potencia par de 2 a otra impar, porque entonces los números tendrían un número impar de cifras y sólo admitirían la solución 1111… En el gráfico se distinguen los comprendidos entre 256 y 512, y más arriba el que va de 1024 a 2048.

Idéntico fenómeno se percibe en otras bases. Por ejemplo, en base 3 la distribución sería



Y en base 4:



Con pares e impares

Hemos leído otra definición de equilibrado en base 10: es aquel número que contiene el mismo número de dígitos pares que de impares. También es un problema combinatorio.

En primer lugar hay que considerar que el número total de dígitos de estos números ha de ser par. Tal como consideramos en el primer caso de esta serie, habrá que comenzar por contar las distintas distribuciones de PAR e IMPAR que se pueden dar. Por ejemplo, con seis cifras se pueden presentar así: PPPIII, PPIPPII, PPIIPI, PPIIIP, PIPPII, PIPIIP, PIIPPI,….Son permutaciones con repetición de dos símbolos tomados de seis en seis, es decir: 6!/(3!3!)=20, y después rellenar los elementos P e I con los cinco casos de cada clase, es decir con variaciones con repetición de cinco elementos tomados las veces necesarias. Aquí sería $20*5^3*5^3=312500$

En general, para n pares y n impares:

$$N(n,n)=\frac{(2n)!}{n!\,n!}5^{2n}$$

Por ejemplo, con cuatro cifras nos resultaría $24/(2*2)*5^4=3750$ y con dos: $2/(1*1)*5^2=50$.

Estas fórmulas contienen los casos en los que el cero es la cifra inicial y el número de cifras disminuye en una unidad. La comprobación y en su caso corrección de esto la podemos efectuar contando los equilibrados entre dos números.

Descubrimiento de equilibrados

Otro enfoque es el de descubrir si un número de 2n cifras es equilibrado en este sentido. Podríamos recorrer sus dígitos y ver si el carácter PAR y el IMPAR se equilibran. Llegaríamos a un algoritmo semejante al siguiente:

Public Function esequilibradop(n) As Boolean ' se podrá borrar
Dim par, impar
Dim i, nc, co
Dim s$, ca$

par = 0: impar = 0 ‘Contadores de cifras pares e impares
s$ = Str$(n) ‘En las cuatro líneas siguientes convertimos el número en string
nc = Len(s$)
s$ = Right$(s$, nc - 1)
nc = nc - 1
If nc / 2 <> nc \ 2 Then esequilibradop = False: Exit Function ‘Número impar de cifras
For i = 1 To nc
ca$ = Mid$(s$, i, 1)
co = Asc(ca$) – 48 ‘Se halla el valor del dígito
If co / 2 = co \ 2 Then par = par + 1 Else impar = impar + 1 ‘Se acumula el contador
Next i
If par = impar Then esequilibradop = True Else esequilibradop = False
End Function

Con esta función es fácil contar equilibrados en un intervalo

Public Function contareq(m, n)
Dim a, c
If m > n Then a = m: m = n: n = a
c = 0
For a = m To n
If esequilibradop(a) Then c = c + 1
Next a
contareq = c

End Function

Por el problema del cero inicial, esta función contará menos casos que la anterior de tipo combinatorio. Lo vemos en esta tabla:

Número 2N de cifras	Mínimo	Máximo	Combinatoria	Contador	Diferencia
2	10	99	50	45	5
4	1000	9999	3750	3375	375
6	100000	999999	312500	281250	31250

Para dos cifras el desfase es de 5, correspondiente a los casos 01, 03, 05, 07, 09.

Para cuatro cifras es de 375, que coincide con este cálculo: 3!/(2!1!)*5^3=375 y para seis cifras con 5!/(3!2!)*5^5=31250. Te dejamos razonar esto y descubrir una relación existente en la tabla.

Otras definiciones

Aún hemos encontrado más definiciones de números equilibrados. Las dejamos ahí por si las deseas estudiar:

- Un número es equilibrado cuando el número de veces que aparece en él una cifra par es IMPAR, y el número de cifras impares es PAR.
- Un número de tres cifras es equilibrado si la de las decenas es el promedio de las otras dos.
- La misma definición anterior, pero sin exigir que sean las decenas.

Hasta es posible que te inventes alguna nueva definición. Esto es como un juego.

PERMUTACIONES OBTENIDAS POR SIMULACIÓN

El estudio que emprendemos hoy se parece bastante al problema de completar una colección de cromos, que ya tratamos hace unos meses (http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2012/05/este-cromo-lo-tengo-repe-1.html)

Pertenece al tipo de problemas de llenado aleatorio de un conjunto, como el de una línea o un cartón de bingo. Estos ejemplos se caracterizan porque la probabilidad de obtención de un nuevo elemento del conjunto depende del número de los ya obtenidos, en el sentido negativo, de ir disminuyendo la probabilidad conforme se llena el conjunto.

Hoy lo experimentaremos con permutaciones. Hace días, jugando con las cifras del número 19913 con el fin de obtener todos los números primos posibles, acudí a la herramienta Combimaq, de ***hojamat.es*** (http://hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/herrcomb.htm#combimaq), que me proporcionó la solución exacta, elemental, de 30 permutaciones, 30=5!/(2!2!)=120/4

SU1	SU2	SU3	SU4	SU5
1	1	9	9	3
1	1	9	3	9
1	1	3	9	9
1	9	1	9	3
1	9	1	3	9
1	9	9	1	3
1	9	9	3	1
1	9	3	1	9
1	9	3	9	1
1	3	1	9	9
1	3	9	1	9
1	3	9	9	1
9	1	1	9	3
9	1	1	3	9
9	1	9	1	3
9	1	9	3	1
9	1	3	1	9
9	1	3	9	1
9	9	1	1	3
9	9	1	3	1
9	9	3	1	1
9	3	1	1	9
9	3	1	9	1
9	3	9	1	1
3	1	1	9	9
3	1	9	1	9
3	1	9	9	1
3	9	1	1	9
3	9	1	9	1
3	9	9	1	1

Me pregunté entonces por la posibilidad de obtener esos resultados mediante simulación. Elegí este procedimiento:

(1) Se fija un conjunto cualquiera de unos pocos elementos, por ejemplo el dado 1, 9, 9, 1, 3, con o sin repetición de elementos.
(2) Lo sometemos reiteradamente a transposiciones aleatorias de sus elementos. Como una permutación se puede descomponer en dichas transposiciones, cada vez que efectuemos esta operación estaremos creando una permutación del conjunto primitivo. Como es de suponer, después de varios intentos las permutaciones comenzarán a repetirse.
(3) Cada permutación nueva la comparamos con las anteriores, y si es distinta a todas ellas, la incorporamos a la lista de las formadas y seguimos el proceso. Nada nos garantiza que esto agote el conjunto de todas las permutaciones posibles, al igual que una colección de cromos en la que no se intercambian ni se compran puede no llegar a completarse nunca.
(4) El proceso parará si le incluimos un tope, que podría ser el número total de permutaciones que conozcamos previamente. Por ejemplo, en el caso de 19913 serían 30 permutaciones. Si no se indica ningún tope, puede que el proceso llegue a completar el catálogo de permutaciones o bien, cosa improbable, que nunca lo haga, se inicie un ciclo sin fin y haya que interrumpir el proceso (en realidad, esto también puede ocurrir fijado un tope de resultados). Esta interrupción se logra con la pulsación de la tecla ESC (en Excel) o Ctrl+May+ Q en OpenOffice y LibreOffice.

Descripción de la herramienta:

Hemos incluido este simulador en http://hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/herrcomb.htm#simulpermu

Funcionamiento

La hoja principal presenta esta estructura

Escribes los elementos del conjunto en la fila de color verde. En la imagen se ha elegido ***aaabbb***. Fijas el número de elementos, porque en esa fila puede haber otros residuales más a la derecha. Después concretas el tope, o ***número de permutaciones*** esperado. En el ejemplo hemos escrito un 0 para que sea el simulador el que llegue al número de permutaciones totales, en este caso 20.

En la parte izquierda verás aparecer los intentos y los resultados. Es normal que se necesiten muchos intentos, y en este caso sin tope, la tardanza nuestra en interrumpir el proceso añadirá más. Por eso, para recuentos o estadísticas es preferible fijar previamente el número esperado de permutaciones. Junto a cada permutación figura el número de intentos que ha necesitado.

Podemos usar el simulador para reproducir un resultado que ya conocemos. Imaginemos que en un curso de Combinatoria al alumnado le cuesta entender el número de permutaciones que se pueden construir con las letras REDADA. Iniciamos la simulación y observamos que la creación de permutaciones se estabiliza en el número 180

[redacted]							
6	[redacted]						
[redacted]		R	E	D	A	D	A
0	[redacted]						
[redacted]							
1820	[redacted]						
[redacted]							
180	[redacted]						
[redacted]							

Para entender mejor el proceso, ordenamos la tabla completa mediante las columnas D, E, F,… (no olvides desactivar la opción de “Mis datos tienen encabezados”). De esta forma se entenderá mejor cómo se crean las distintas permutaciones:

A	A	D	D	E	R
[redacted]					

En un segundo paso se puede demostrar la fórmula 6!/(2!2!)=720/4=180

Por el contrario, si sabemos, por ejemplo, que el conjunto 17767 presenta 5!/3!=20 permutaciones, planteamos la generación aleatoria con tope 20, y posteriormente ordenamos la tabla:

[redacted]				

Podemos observar que las permutaciones se han ordenado de forma creciente (como si fueran cifras de un número) y demuestran mediante formación ordenada que el número de permutaciones vale 20.

Estadísticas de la simulación

Lo anterior presenta un interés relativo, es un mero ejercicio de simulación. Le dotaremos de más potencia realizando algunas estadísticas mediante la inclusión de un generador de series, que repite el proceso cuantas veces deseemos y nos devuelve las estadísticas.

Recuerda que cada permutación viene acompañada de los intentos que se han necesitado para encontrarla. En la imagen figura el desarrollo para generar las permutaciones del conjunto 1234.

[redacted]	1	2	3	4

[redacted]

Se han necesitado 64 intentos, repartidos como se ve en la imagen, con bastantes oscilaciones aleatorias, aunque con tendencia a crecer. Si deseamos estudiarlos mejor deberemos acudir a series de simulaciones.

La primera permutación sólo ha necesitado un intento. Siempre es así si el conjunto básico no presenta repeticiones (¿por qué?). Aquí el segundo también ha salido a la primera, pero el tercero ya necesita a 2 intentos. Así van aumentando hasta llegar al último, que requirió 11 intentos. Estamos ante una sucesión creciente de incrementos también crecientes.

Para estudiarla mejor pasamos a la segunda hoja de cálculo, en la que disponemos del botón para crear series, y lanzamos una de 1000 repeticiones, para obtener unas medias que se puedan confrontar con una posible teoría o realizar el ajuste a una función. El resultado de esta serie ha sido el siguiente:

Nº permutación	Intentos medios	Pascal
2	1,00	1,04
3	1,22	1,09
4	1,24	1,14
5	1,29	1,20
6	1,32	1,26
7	1,44	1,33
8	1,52	1,41
9	1,67	1,50
10	1,79	1,60
11	1,89	1,71
12	2,02	1,85
13	2,24	2,00
14	2,32	2,18
15	2,55	2,40
16	2,69	2,67
17	3,22	3,00
18	3,70	3,43
19	4,23	4,00
20	5,11	4,80
21	6,5	6,00
22	9,0	8,00
23	12,5	12,00
24	24,5	24,00

¿Se podrá confrontar esto con alguna teoría? En realidad sí, porque el caso de los intentos necesarios para obtener unos éxitos se estudia con la distribución binomial negativa o de Pascal (http://www.uv.es/ceaces/base/modelos%20de%20probabilidad/binegativa.htm). En nuestro ejemplo sólo se pretende conseguir un éxito y no varios, por lo que la fórmula de los intentos medios es muy simple M=1/p, siendo p la probabilidad de obtener, en nuestro caso, una permutación nueva, y que será del tipo 3/24, 4/24, …

En la imagen se han añadido los resultados que se esperarían según la teoría. Parecen muy ajustados, pero en otros muchos experimentos que hemos realizado se advierte un sesgo, en el sentido de que el número de intentos medios es algo superior a lo esperado, lo que nos hace dudar de la absoluta aleatoriedad del proceso.

En esa misma segunda hoja aparecerán los valores máximos y mínimos del número de intentos. El mínimo, si no hay repeticiones, siempre será 1 y el máximo oscila tanto que no tiene interés una estadística sobre él.

Pues a ver si descubres algo más o amplías el modelo.

GRUPO SIMÉTRICO

Solemos considerar las permutaciones como las distintas ordenaciones de un conjunto. Existe otro punto de vista alternativo, que es muy fructífero, y es considerarlas como aplicaciones biyectivas del conjunto en sí mismo. Así, la permutación S=(3,2,1,4) se puede considerar derivada de (1,2,3,4) (orden principal) mediante la aplicación S(1)=3, S(2)=2, S(3)=1 y S(4)=4. Así la interpretaremos aquí.

Como la naturaleza de los elementos no influye en la teoría, imaginaremos que se trabaja siempre sobre el conjunto {1,2,3,4,…,n} y que una permutación como S=(5,1,3,2,…) se interpreta: S(1)=5, S(2)=1, S(3)=3, S(4)=2,…La escribimos así, como un conjunto de imágenes, por comodidad de escritura, pero te la puedes imaginar con los orígenes sobre ellas formando una matriz de dos filas, con lo que cae cada imagen debajo del origen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ 5 & 1 & 3 & 2 & \dots \end{pmatrix}$$

Las permutaciones se pueden componer como todas las aplicaciones, usando una de ellas y después la otra sobre las imágenes de la primera. No es fácil verlo en este caso, por lo que usaremos un ejemplo:

Sean G=(4,2,5,3,1) y H=(1,4,3,5,2), o escribiendo orígenes:

G: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

H: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

La composición H*G (escribiendo de derecha a izquierda) se formaría así (hay que estar atentos):

H*G(1)=H(G(1))=H(4)=5 H*G(2)=H(G(2))=H(2)=4
H*G(3)=H(G(3))=H(5)=2 H*G(4)=H(G(4))=H(3)=3
H*G(5)=H(G(5))=H(1)=1, con lo que resultaría

H*G=(5,4,2,3,1) Como ves, no es nada intuitivo.

Es fácil demostrar que las n! permutaciones forman grupo para esta composición, siendo la identidad E=(1,2,3,4,…, n) y el inverso la permutación que convierte las imágenes en orígenes. A este grupo le llamaremos ***Grupo simétrico*** para {1,2,3,…, n} y lo representaremos como S_n.

¿Te apetecería comprobar composiciones de permutaciones con hoja de cálculo?

Te damos unas ideas:

Puedes escribir en filas distintas, una debajo de la otra, las dos permutaciones G y H (en la imagen, filas 12 y 16) y después la composición de ambas (fila 20), que es la única que contendrá fórmulas. El resto de la hoja sólo contiene datos.

Es muy interesante estudiar qué fórmula podemos implementar en la fila 20 de la imagen. Explicaremos la primera celda, B20, y después bastará extenderla al resto de la fila. La fórmula adecuada es:

=ÍNDICE($B16:$J16;1;B12)

La función ÍNDICE elige en una lista el elemento que presenta un número de orden. En este caso la lista es la permutación H. De ahí que hayamos usado el rango $B16:$J16. Después hay que indicar la fila del rango. Como solo hay una fila, hemos escrito un 1. El siguiente parámetro es el número de orden, y aquí va a residir el truco: Hemos de elegir en H el elemento que ocupe el lugar que indica G en la misma columna. Insistimos en que esto, al principio, no es fácil. Hemos escrito en la fórmula “B12”, que es la primera imagen de G, un 6, luego deberemos ir a H y buscar el sexto elemento, un 8, y por eso en la celda B20 aparece ese 8.

Como puede que te siga costando, te ofrecemos esta hoja en la dirección

http://hojamat.es/blog/compopermu.zip

Como el grupo simétrico opera sobre un conjunto finito (cardinal n!), la aplicación reiterada de una sustitución consigo misma (potencia de la permutación) llevará a la repetición de resultados, es decir, a que dos potencias distintas sean equivalentes:

$P^m=P^n$

Si suponemos, por ejemplo que m<n, entonces esa igualdad, si le aplicamos la permutación inversa para simplicar, se convertiría en

$P^{n-m}=P^k=E$ (identidad)

Toda permutación, aplicada un número determinado de veces, se convierte en la identidad.

El número mínimo para el que eso ocurre recibe el nombre de ***orden*** de la permutación. En los ejemplos de arriba, el orden de G es 4, y el de H es 3. Compruébalo. Esta idea nos servirá en lo que sigue.

Composición de permutaciones

A. Roldán 2011

Orden principal	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Permutación G	6	4	5	2	1	3	9	8	7
Permutación G	6	4	5	2	1	3	9	8	7
Composición G*G	3	2	1	4	6	5	7	8	9

Una propuesta: En la imagen se ha compuesto G consigo misma, y el conjunto total parece haberse dividido en tres subconjuntos, cada uno de los cuales parece que va “a su aire”, sin mezclarse con los otros. ¿Cuáles son?

DESCOMPOSICIÓN EN CICLOS

Algunas permutaciones dejan invariantes unos elementos, y a otros los van transformando cíclicamente hasta volver al primero. Así, la permutación (1,3,4,2,5,6) deja invariantes 1, 5 y 6, mientras 3 se transforma en 4, este en 2 y el 2 tiene como imagen el 3. A este tipo de permutaciones las llamaremos ***ciclos***. Omitimos definiciones formales, porque aquí nuestro interés es práctico y de aprendizaje de las hojas de cálculo.

Llamaremos ciclo a una permutación que deja invariantes algunos elementos y somete a una rotaciones completas a los restantes.

Representaremos un ciclo mediante los elementos que se van transformando uno en otro, omitiendo los invariantes. Así, (3,4,2) representaría a la anterior permutación. Podemos someter a los elementos 3,4,2 a una rotación en el orden y representarían el mismo ciclo: (3,4,2) = (4,2,3) = (2,3,4), pero otro tipo de alteración del orden, como (3,2,4) ya representaría un ciclo distinto. Si aplicamos reiteradamente un ciclo, cada elemento irá pasando por todas las posiciones posibles e, inversamente, por una posición dada irán pasando ordenadamente todos los elementos.

Un mismo ciclo se puede representar comenzando con cualquiera de sus elementos si se respeta el orden circular.

Un ciclo de un elemento representa un elemento invariante, y el de dos, una transposición entre dos elementos. Si el ciclo abarca la permutación completa, a esta la llamaremos ***cíclica***.

La propiedad más importante de los ciclos es que toda permutación se puede descomponer en ciclos disjuntos de forma única salvo el orden. Según esto, la del ejemplo podemos representarla como (1,3,4,2,5,6)=(3,4,2)(1)(5)(6). Se suelen ordenar los ciclos por su magnitud, de mayor a menor.

¿Cómo descomponer una permutación en ciclos?

El procedimiento puede ser el siguiente:

Elegimos el elemento 1, y aplicamos la permutación de forma reiterada hasta que la imagen vuelva a ser 1. Como el conjunto es finito, esto se acabará logrando, con lo que ya tendremos el primer ciclo de la descomposición. Buscamos después el siguiente elemento que no pertenezca al ciclo conseguido (si hemos acabado es que la permutación estudiada se reduce a un solo ciclo, es cíclica) y efectuamos la misma operación para obtener el segundo ciclo, y así sucesivamente hasta agotar el conjunto.

Por ejemplo, la permutación (4, 2, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 3, 1, 5) nos llevaría al siguiente proceso:

Comenzamos con el 1. Las sucesivas imágenes serían: 1 – 4 – 7 – 10 – 1. Ya tendríamos el primer ciclo (4, 7, 10, 1).

Buscamos el siguiente elemento no estudiado aún: el 2, que se transforma en sí mismo. El siguiente ciclo es, pues, (2)

Siguiente elemento libre: 3, que engendra: 3 – 6 – 9 – 3, formando el ciclo (3, 6, 9)

Por último, con 5 logramos (5, 8, 11)

Hemos terminado: (4, 2, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 3, 1, 5) = (4, 7, 10,1) (3, 6, 9) (5, 8, 11) (2)

Como cada ciclo opera sobre elementos disjuntos, esta descomposición es un producto en Sn, en el que los ciclos son permutables y por tanto, no influye el orden.

En este proceso los ciclos que se formen serán disjuntos, pues si dos de ellos tuvieran un elemento común, al aplicar el ciclo sobre él reiteradamente se incluirían todos los elementos, y los ciclos serían en realidad uno solo.

El número de ciclos en que se descompone una permutación varía entre 1, si ella misma es cíclica, hasta **n**, si se trata de la permutación identidad.

Podemos conseguir que una hoja de cálculo haga lo mismo:

		Permutación G									
4	2	6	7	8	9	10	11	3	1	5	
			Ciclos								
1	2	3	1	4	3	1	4	3	1	4	0
4	7	10	1								
2											
6	9	3									
8	11	5									

Lo hemos implementado en Excel y Apache OpenOffice (http://hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/herrcomb.htm#ciclos)

Observa que ha creado una fila en la que va tomando nota de los ciclos a los que pertenece cada elemento, y después ha escrito debajo la composición de cada ciclo. Es una tarea un poco larga, por lo que sólo explicaremos los fundamentos, remitiendo después a la hoja ya confeccionada.

Proceso para encontrar los ciclos:

1) Se crean unas memorias que contendrán la información de los ciclos que se van ocupando. Al principio se inician todas a cero.

2) En cada paso del proceso se busca el primer elemento cuyo número de ciclo es 0. Se aumenta en una unidad el número del ciclo, que, por tanto, comenzará en 1. Con un procedimiento similar al usado anteriormente, se aplica reiteradamente la permutación hasta completar el ciclo.

Este paso se da mientras exista un elemento con número de ciclo 0. Para cada elemento, se irá escribiendo en la hoja a qué ciclo pertenece.

3) Localizados los ciclos, se van buscando los elementos de cada uno y se escriben en filas distintas debajo del esquema. Esta parte es más informática que matemática, y la podemos omitir.

Generación aleatoria

Como la hoja de cálculo ofrecida no tiene más objetivo que el de explicar el concepto, se ha añadido la posibilidad de generar aleatoriamente una permutación para comprender mejor la descomposición en ciclos.

Generación aleatoria	
Total elementos (no más de 20)	
16	
	Aleatorio

Orden de un ciclo

No es difícil entender que el orden de un ciclo es su longitud, ya que los elementos invariantes seguirán siéndolo aunque reiteremos y los cíclicos se irán recorriendo uno por uno y se llegará al primero cuando se recorra toda la longitud:

El orden de un ciclo coincide con su longitud

También es sencillo entender que si una permutación se descompone en ciclos, su orden será el MCM de las longitudes de los mismos.

Así, el orden de (1)(2, 3, 7)(4, 5)(6) será 6, el mcm(1, 3, 2, 1)

En la misma hoja se puede estudiar el orden de los ciclos y el de la permutación total

El orden de los ciclos aparece en la parte izquierda de los mismos

Orden													
13	12	2	3	16	6	18	15	7	9	19	14	5	1
2	11	4											
2	17	8											
1	10												
1	13												
0													

El orden total, MCM de los de los ciclos lo tendrás en la parte derecha

Orden de la permutación		
26		

Transposiciones

Llamaremos transposición a un ciclo de orden 2. Todo ciclo, y en consecuencia toda permutación, se puede descomponer en transposiciones. Se comprende sólo con estudiar este desarrollo:

(a, b, c, d, e)=(a, e)(a, d)(a, c)(a, b)

Esta descomposición no es única.

Permutaciones circulares o cíclicas

Puede ocurrir que una permutación sea en sí misma un ciclo. La llamaremos cíclica o circular. Dentro del grupo simétrico $\mathbf{S_n}$ el número de permutaciones cíclicas equivale a (n-1)! Es algo muy conocido y se justifica porque para inventarte una permutación de este tipo en primer lugar has de ordenar todos los elementos, lo que puedes realizar de n! formas diferentes y una vez elegida una, esta representa n circulares idénticas, porque tienes n formas de elegir el primer elemento, luego el número es n!/n=(n-1)!

Permutaciones de n elementos que son ciclos de orden k

Deberemos elegir k elementos para el ciclo y dejar los restantes n-k fijos. El elegirlos nos supone **Cn,k** formas y dentro de los elegidos, **(k-1)!** ciclos posibles, luego el número total de ciclos de orden k será

$$\binom{n}{k}(k-1)!$$

Permutaciones reducidas

Son aquellas que no dejan fijo ningún elemento, las que en la descomposición en ciclos **ninguno de ellos tiene orden 1**. Son las conocidas como desarreglos (o desbarajustes) Los puedes estudiar en http://hojamat.es/sindecimales/combinatoria/teoria/teorcomb.pdf

En esa dirección hemos explicado su fórmula

$$D = n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots(-1)^n\frac{1}{n!}\right)$$

NÚMEROS DE STIRLING DE PRIMERA ESPECIE.

Vimos en el capítulo anterior que toda permutación sobre el conjunto {1,2,3,…,n} se puede descomponer en k ciclos, y van desde la identidad, que comprende n ciclos, hasta las permutaciones cíclicas, que se reducen a un solo ciclo.

Si fijamos el número k, podremos plantearnos cuántas permutaciones se pueden descomponer **exactamente en k ciclos**. Por ejemplo, en el conjunto {1,2,3,4,5}, las permutaciones formadas por dos ciclos son (escribimos sólo los conjuntos invariantes en los ciclos):

(1,2,3,4)(5), (1,2,3,5)(4), (1,2,4,5)(3), (1,3,4,5)(2), (2,3,4,5)(1),

(1,2,3)(4,5), (1,2,4)(3,5), (1,3,4)(2,5), (2,3,4)(1,5), (1,2,5)(3,4), (1,3,5)(2,4), (2,3,5)(1,4),

(1,4,5)(2,3), (2,4,5)(1,3), (1,3,5)(1,2)

Resultan en total 15 configuraciones, pero cada conjunto de cuatro elementos equivale a seis ciclos (permutaciones circulares, factorial de n-1=3). Así, (1,2,3,4) contiene en realidad los ciclos (1,2,3,4), (1,2,4,3), (1,3,2,4), (1,3,4,2), (1,4,2,3)(1,4,3,2) y cada conjunto de tres equivale a dos ciclos (y los de dos, a uno solo), luego tendremos:

$S(5,2)=5*6+10*2=50$

Al número de permutaciones de n elementos que están formadas por k ciclos le llamaremos número de Stirling de primera especie sin signo, y lo representaremos por S(n,k). Así, el cálculo anterior se puede expresar como S(5,2)=50

Es evidente que S(n,n)=1, pues sólo la identidad contiene n ciclos, y que S(n,1)=(n-1)!, pues representaría a las permutaciones circulares. Además, S(n,0)=0, valor adoptado por definición. Piensa también por qué S(n,n-1)=Cn,2 (número combinatorio).

El resto de números de Stirling se obtiene mediante la fórmula de recurrencia

S(n+1,k)=S(n,k-1)+nS(n,k)

En efecto, si añadimos un elemento nuevo a una configuración en ciclos, puede ocurrir que ese elemento sea un invariante, que forme ciclo consigo mismo. En ese caso puede estar acompañado de S(n,k-1) formas distintas de distribución en ciclos. Por el contrario, si el nuevo lo deseamos integrar en los ciclos ya existentes, lo podemos incluir ocupando n lugares distintos, luego formará nS(n,k) configuraciones diferentes.

Lo entenderás mejor con un ejemplo. Formemos todas las distribuciones de 4 elementos en 3 ciclos:

(1)(2,3)(4), (2)(1,3)(4), (3)(1,2)(4)

(1,4)(2)(3), (1)(2,4)(3), (1)(2)(3,4)

En total resultan 6. En la primera fila hemos añadido el 4 como elemento invariante, añadido a las tres configuraciones de 3 elementos en dos ciclos S(3,2) y en la segunda lo hemos integrado en los ciclos existentes, que sólo tienen una posibilidad, (1)(2)(3) (S(3,1)) y podemos insertarlo en 3 posiciones distintas, luego resultan 3S(3,3). En resumen:

S(4,3)=S(3,2)+3S(3,3)

Esto nos da una posibilidad de calcular estos números. Por convenio se les da valor cero cuando el número de ciclos es cero. En la imagen tienes la tabla conseguida en hoja de cálculo con stirling.xls y stirling.ods (los puedes descargar desde

http://hojamat.es/sindecimales/combinatoria/herramientas/herrcomb.htm#nume)

	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	0	1	1				
3	0	2	3	1			
4	0	6	11	6	1		
5	0	24	50	35	10	1	
6	0	120	274	225	85	15	1
7	0	720	1764	1624	735	175	21
8	0	5040	13068	13132	6769	1960	322
9	0	40320	109584	118124	67284	22449	4536
10	0	362880	1026576	1172700	723680	269325	63273
11	0	3628800	10628640	12753576	8409500	3416930	902055
12	0	39916800	120543840	150917976	105258076	45995730	13339535
13	0	479001600	1486442880	1931559552	1414014888	657206836	206070150

Comprueba en ella alguna generación por recurrencia. Por ejemplo, 274=50*5+24, 1624=225*6+274

También es elemental la propiedad de que la suma de números de Stirling para un n dado es **n!**, pues abarcan todas las posibilidades. Comprueba este hecho sumando todos los números de una misma fila en la tabla de la imagen.

Observa que cada fila posee un solo máximo, como ocurre, por ejemplo con los números combinatorios, sólo que aquí no está necesariamente en el punto medio.

Función generatriz

La función generatriz de estos números (con signo), para un **n** dado es

$$F_n(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-n+1)=x^{(n}$$

Con ella resultan los números con signo y prescindiendo de S(n,0). Observa que se trata de una potencia factorial, o factorial de grado **n** de **x**. Los números de Stirling con signo obedecen la misma fórmula de recurrencia, pero restando el segundo término. Esto es claro si consideras el desarrollo de

$$F_{n+1}(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-n+1)(x-n)= F_n(x)(x-n)$$

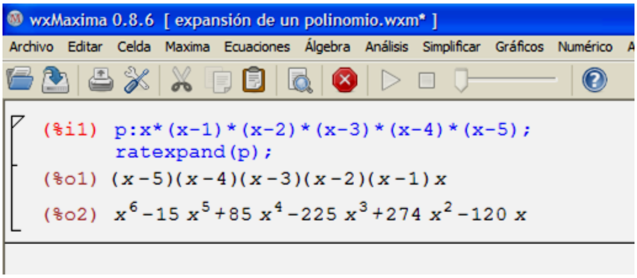
Piensa en un grado cualquiera del desarrollo y lo comprenderás.

Lo podemos comprobar con PARI, por ejemplo en el caso n=6

{print(taylor(x*(x-1)*(x-2)*(x-3)*(x-4)*(x-5),x,7))}

Resultado: -120*x + 274*x^2 - 225*x^3 + 85*x^4 - 15*x^5 + x^6 + O(x^7)

En la imagen puedes estudiar la comprobación con wxMaxima:



Como ves, los ordena en sentido inverso.

Una interpretación sencilla de este desarrollo es el considerar los números de Stirling (salvo el caso de índice cero) como los coeficientes mediante los que una potencia factorial $\mathbf{x}^{(n}$ se descompone como combinación lineal de potencias ordinarias $\mathbf{x}^{k}$ de x.

FUNCIONES GENERATRICES

UN EJEMPLO INTRODUCTORIO

Antes de iniciar cualquier planteamiento teórico sobre las funciones generadoras (o generatrices), muy usadas en Combinatoria y en el estudio de las sucesiones de números, las introduciremos mediante un ejemplo. Después, en sucesivas entradas, estudiaremos el concepto con más profundidad. Al principio no se ve bien la utilidad de estas funciones, pero si lees la serie entera que vamos a ir publicando descubrirás que constituyen un buen instrumento de cálculo. Paciencia, pues.

Problema

Deseamos elegir nueve cuentas de colores. Disponemos de cantidad suficiente de cuentas rojas, amarillas y verdes, pero queremos elegir entre 2 y 5 rojas, menos de 4 amarillas y al menos 3 verdes. ¿De cuántas formas podemos efectuar la elección?

Este problema nos plantea el desarrollo de **particiones condicionadas** de un número. Ya hemos tocado este tema en el blog (http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2011/02/particiones-de-un-numero.html

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2011/02/funciones-de-particion-de-un-numero.html)

Independientemente de que se trate de particiones, intentaremos resolver el problema con varias técnicas, y entre ellas la del uso de una función generatriz.

Con un producto cartesiano

Como de las rojas hemos de elegir entre 2 y 5, de las amarillas de 0 a 3 y de las verdes un mínimo de 3 y un máximo de 7 (¿por qué 7?), bastará formar el producto cartesiano {2,3,4,5}{0,1,2,3}{3,4,5,6,7} e ir eligiendo las ternas que sumen 9. Un problema totalmente elemental que se puede resolver en enseñanzas medias.

A poco que nos pongamos obtendremos: 9= 2+0+7 = 2+1+6 = 2+2+5 = 2+3+4 = 3+0+6 = 3+1+5 = 3+2+4 = 3+3+3 =4+0+5 = 4+1+4 = 4+2+3 = 5+0+4 = 5+1+3.

En total 13 particiones. Para este problema no se necesitarían más técnicas, pero lo estamos tomando como modelo sencillo de introducción.

Con la hoja de cálculo "***Cartesius***", se pueden construir productos cartesianos condicionados. En el problema que nos ocupa plantearíamos esto, que se comprende sin más explicación:

xtotal=3
x1=2..5
x2=0..3
x3=3..7
suma=9

Y obtendríamos

X1	X2	X3	X4
2	0	7	
2	1	6	
2	2	5	
2	3	4	
3	0	6	
3	1	5	
3	2	4	
3	3	3	
4	0	5	
4	1	4	
4	2	3	
5	0	4	
5	1	3	

Como era de esperar, son los mismos resultados. Veamos ahora el método que deseamos explicar hoy.

Función generatriz

La idea revolucionaria de la función generatriz consiste en sustituir los distintos elementos numéricos por potencias de una indeterminada, **y los conjuntos convertirlos en polinomios**. Así el producto cartesiano {2,3,4,5}{0,1,2,3}{3,4,5,6,7} se puede escribir en forma de producto de polinomios:

$(x^2+ x^3+ x^4+ x^5)(1+x+ x^2+ x^3)(x^3+ x^4+ x^5+ x^6+ x^7)$

Es fácil darse cuenta de que si multiplicamos algebraicamente estos polinomios, el término de grado 9 tendrá como coeficiente el número de particiones pedido, en este caso 13.

Hemos sustituido una técnica de conteo por otra de tipo algebraico o analítico (esto último lo veremos más adelante)

En este caso tan sencillo parece que esto es una complicación, pero en casos generales veremos que puede resultar muy útil. Por dos motivos:

- Las técnicas algebraicas y analíticas permiten simplificar estos productos y encontrar directamente el coeficiente deseado.
- Al desarrollar estos polinomios no sólo resolvemos el problema para 9 cuentas, sino para cualquier otro total posible.

Disponemos en este caso de una ayuda, y es que sabemos sumar muy bien las progresiones geométricas. Así, el producto de polinomios dado se puede expresar como

$$P(x)=\frac{x^2(x^4-1)(x^4-1)x^3(x^5-1)}{(x-1)^3}$$

Este a su vez se puede simplificar

$$P(x)=\frac{x^{18}-2x^{14}-x^{13}+x^{10}+2x^9-x^5}{(x-1)^3}$$

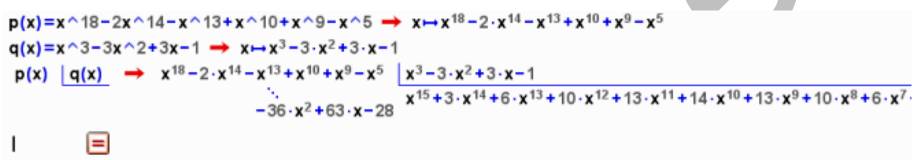
Con tres pasadas del algoritmo de Ruffini encontraremos todos los coeficientes (omitimos los que no influyen en el problema)

Grado	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8
	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]											
	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]											
	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]											
A	1	3	6	10	13	14	13	10	6	3	1
Grado	15	14	13	12	11	10	9	8	7		

Hemos destacado el que nos interesa: con grado 9 aparece el coeficiente 13, que es la solución, pero este procedimiento **nos devuelve mucho más**. Por ejemplo, con suma 7 sólo son posibles estas elecciones: 7=2+0+5=2+1+4=2+2+3=3+0+4=3+1+3=4+0+3, **seis en total**, como marca el esquema, y con suma 14 sólo deberán aparecer 3. Son estas: 4+3+7 = 5+3+6 = 5+2+7

Hemos resuelto varios problemas en uno

Si dispones de un CAS puedes ahorrarte bastante trabajo. Aquí tienes el resultado con la calculadora Wiris (hemos recortado la imagen) Compara los coeficientes con los que resultan con Ruffini.



Es normal que pienses que es mucha complicación, pero se trataba de un problema elemental. En sucesivos apartados daremos un enfoque teórico a las funciones generatrices y nos complicaremos un poco, descubriendo así su utilidad.

LA TEORÍA

En el apartado anterior presentábamos como un artificio sustituir los elementos de un producto cartesiano condicionado de conjuntos numéricos por polinomios en una indeterminada con exponentes idénticos a los números a combinar.

Ahora lo convertiremos en un desarrollo teórico.

Función generatriz de un conjunto numérico

Dado un conjunto ordenado de números reales o complejos (aquí usaremos casi exclusivamente los enteros positivos) $\{a_0, a_1, a_2, a_3,\ldots a_n\}$ llamaremos función generatriz (ordinaria) o generadora del mismo al polinomio de la forma

$$P(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots a_4x^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$$

Si el conjunto tiene infinitos términos sustituiremos el polinomio por una serie de potencias, pero en este caso la igualdad

$$P(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} a_ix^i$$

sólo tendrá sentido si dicha serie posee un radio de convergencia no nulo y la función está definida dentro de ese radio. No obstante, aquí no trataremos la convergencia, sino las relaciones entre coeficientes. Si no converge, P(x) no será una función, pero las técnicas siguen valiendo.

Casos sencillos

El caso más sencillo de función generatriz es la que corresponde al conjunto {1,1,1,1,…1}

Si este es finito con **n** elementos, sabemos que su función generatriz se puede obtener mediante la fórmula de la suma de una progresión geométrica

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Ya usamos esta fórmula anteriormente.

Si el conjunto es infinito {1,1,1,1,…}también es sencillo verificar que

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1 - x}$$

Aquí nos encontramos con la potencia que tiene este método. Si derivamos miembro a miembro (omitimos detalles y también la cuestión de la convergencia) nos encontraremos con que

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \frac{1}{(1 - x)^2}$$

Por tanto esta es la función generatriz del conjunto {1,2,3,4,….}

La fórmula del binomio de Newton nos proporciona otro ejemplo de función generatriz. Los números combinatorios para un n dado tienen por función generatriz **$(1+x)^n$** ya que

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i$$

Podíamos seguir dando ejemplos hasta llenar páginas enteras, pero destacaremos especialmente dos técnicas

Manipulación algebraica

Con las técnicas algebraicas y sin plantearnos ahora el problema de la convergencia podemos encontrar la función generatriz de muchos conjuntos de coeficientes.

Por ejemplo, es fácil encontrarla para los números de Fibonacci F_0, F_1, F_2, F_3, F_4…, de los que suponemos se conocen sus valores y propiedades. Observa estas manipulaciones:

$F(x)=F_0+F_1x+F_2x^2+F_3x^3+F_4x^4+\ldots=$

$F_0+F_1x+(F_0+F_1)x^2+(F_1+F_2)x^3+(F_2+F_3)x^4+\ldots =$

$F_0+F_1x+(F_0x^2+F_1x^3+F_2x^4+\ldots) + (F_1x^2+F_2x^3+F_3x^4+\ldots)$

Pero en los paréntesis se está reconstruyendo F(x) de alguna forma, por lo que podemos escribir (pon tú los detalles)

$F(x)= F_0+F_1x+F(x)x^2+(F(x)-F_0)x$

Despejamos F(x), sustituimos F_0 por su valor 0 (a veces se toma 1) y F_1 por 1 y ya la tenemos:

$$F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$$

Sólo hemos usado técnicas algebraicas sencillas. Más adelante comprobaremos este resultado.

Manipulación analítica

Si consideramos la derivación e integración formales podemos encontrar fácilmente funciones generatrices. Ya hemos considerado un ejemplo de derivación.

De la misma forma podemos usar la integración. Por ejemplo en la geométrica podemos integrar

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

Nos resultaría entonces

$$o + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots = ln\frac{1}{1-x}$$

En cualquier manual puedes encontrar muchos ejemplos similares de este tipo de manipulación. No olvides que podemos mezclar las dos técnicas, analítica y algebraica, así como sumar, multiplicar y otras.

Problema inverso

Si la serie que define la función generatriz converge y conocemos esta, encontrar los coeficientes de la misma siempre es posible por la fórmula de McLaurin

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Es un camino muy pesado, pero seguro. Sin embargo el problema contrario de dar los coeficientes y encontrar la expresión de P(x) quizás no lo puedas resolver. Es el clásico problema de la suma de series.

Con la ayuda de un ordenador se puede simplificar el proceso. Damos un ejemplo:

Antes vimos que los números de Fibonacci tenían como función generatriz (si se toma $F_0=0$. A veces se toma $F_0=1$ y entonces tiene una expresión ligeramente distinta)

$$F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$$

Si tuviéramos posibilidad de desarrollar por McLaurin en algún lenguaje o programa, nos ahorraríamos mucho trabajo. Nosotros lo hemos hecho con el lenguaje PARI. Se entiende fácilmente aunque no se haya usado nunca:

{write("final.txt",taylor(x/(1-x-x^2), x,12))}

Ordenamos que escriba en el archivo "***final.txt***" 12 términos del desarrollo de Taylor (es en x=0) de la función dada. El resultado es:

0+x + x^2 + 2*x^3 + 3*x^4 + 5*x^5 + 8*x^6 + 13*x^7 + 21*x^8 + 34*x^9 + 55*x^10 + 89*x^11 + O(x^12)

Como vemos, los coeficientes son los números de Fibonacci. Si quisiéramos hacer $F_0=1$ nos daría otro resultado, pues la función generatriz seria $1/(1-x-x^2)$ (intenta demostrarlo)

Programaríamos en PARI esta variante:

{write("final.txt",taylor(1/(1-x-x^2), x,12))}

Obtendríamos la sucesión comenzando en 1:

1 + x + 2*x^2 + 3*x^3 + 5*x^4 + 8*x^5 + 13*x^6 + 21*x^7 + 34*x^8 + 55*x^9 + 89*x^10 + 144*x^11 + O(x^12)

Lo podemos intentar con el ejemplo del aparatado anterior, el de las bolas de colores, cuya función generatriz sin desarrollar era

$$P(x) = \frac{x^2(x^4-1)(x^4-1)x^3(x^5-1)}{(x-1)^3}$$

Deberíamos escribir en PARI

{write("final.txt",taylor(x^5*(x^4-1)^2*(x^5-1)/(x-1)^3, x,20))}

Obtendríamos

x^5 + 3*x^6 + 6*x^7 + 10*x^8 + 13*x^9 + 14*x^10 + 13*x^11 + 10*x^12 + 6*x^13 + 3*x^14 + x^15 + O(x^20)

Identificamos los resultados anteriores: Con grado 9 el coeficiente es el esperado, 13. Para el grado 14 sólo 3 y para el grado 7 los 6 que ya se obtuvieron.

Más adelante veremos las funciones generatrices de combinaciones, variaciones y demás. Hoy seguiremos con ejemplos:

¿De cuántas formas se puede descomponer el número 28 como suma de primos distintos?

Los primos inferiores a 28 son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23. Cada uno de ellos o está en la suma una vez o no está. Entonces podemos usar términos del tipo $(1+x^7)$ o $(1+x^{11})$ para combinarlos en la función generatriz:

$F(x)= (1+x^2)\ (1+x^3)\ (1+x^5)\ (1+x^7)\ (1+x^{11})\ (1+x^{13})\ (1+x^{17})\ (1+x^{19})\ (1+x^{23})$

Desarrollamos con wxMmaxima y nos da (hemos recortado la imagen):

$$x^{81}+4\,x^{80}+4\,x^{79}+4\,x^{78}+5\,x^{77}+5\,x^{76}+5\,x^{75}+6\,x^{74}+5$$
$$9\,x^{57}+10\,x^{56}+9\,x^{55}+10\,x^{54}+9\,x^{53}+10\,x^{52}+9\,x^{51}+10$$
$$^{35}+6\,x^{34}+8\,x^{33}+6\,x^{32}+7\,x^{31}+6\,x^{30}+6\,x^{29}+6\,x^{28}+5$$
$$^{11}+2\,x^{10}+x^9+x^8+2\,x^7+2\,x^5+x^3+x^2+1$$

Vemos que para el exponente 28 el coeficiente es 6, luego existen 6 formas distintas de expresar 28 como suma de primos distintos

Lo comprobamos con nuestra herramienta PARTLISTA (http://hojamat.es/sindecimales/aritmetica/herramientas/herrarit.htm#reprenum)

Escribe aquí el número		28	
		6	
	11+17		
	5+23		
	3+5+7+13		
	2+7+19		
	2+3+23		
	2+3+5+7+11		

Con ella vemos las seis sumas: 28=11+17=5+23=3+5+7+13=2+7+19=2+3+23=2+3+5+7+11

Con la función generatriz hemos conseguido también otros muchos coeficientes, pero cuidado con la lista de primos 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23. Este desarrollo sólo valdría hasta el 28. Para números mayores deberíamos añadir $(1+x^{29})(1+x^{31})$…

Con la función generatriz podemos resolver varios problemas a la vez.

Estos desarrollos algebraicos son pesados incluso con ayuda de los CAS. Sería bueno elegir un solo coeficiente en ellos. El lenguaje PARI que estamos usando últimamente (es gratuito aunque de gestión poco amigable) posee la función POLCOEFF(P(x),E) en la que P(x) es un polinomio y E un exponente dado, y nos devuelve el coeficiente de ese polinomio correspondiente al grado E. Nuestro problema del 28 se calcularía así:

print(polcoeff((x^2+1)*(x^3+1)*(x^5+1)*(x^7+1)*(x^11+1)*(x^13+1)*(x^17+1)*(x^19+1)*(x^23+1),28))

Daría un resultado de 6. Si cambiamos 28 por un número inferior obtendremos más resultados. Para números superiores deberíamos incrementar los primos.

Ya vimos esta relación

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i$$

Es el clásico Binomio de Newton y nos da de forma inmediata la función generatriz de las **combinaciones de n elementos sin repetición**.

Esta forma de expresar los números combinatorios da lugar a demostraciones muy sencillas de algunas de sus propiedades. Observa esta identidad

$$(1+x)^m \cdot (1+x)^n = (1+x)^{m+n}$$

Si la desarrollas da lugar a la identidad de Vandermonde

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k} \binom{n}{r-k}$$

Basta imaginarse cómo sería el producto de las dos potencias

De igual forma, de esta otra identidad

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n + x(1+x)^n$$

Nos resultaría

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Basta con igualar términos con el exponente k

Así se podría demostrar otras similares.

Combinaciones con repetición

La fórmula del binomio de Newton es válida también para exponente negativo, pero en ese caso los números combinatorios tendrían la forma

$$\binom{-n}{r}=\frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\ldots}{r!}=(-1)^r\frac{(n)(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1)}{r!}$$

Pero la última expresión coincide con las combinaciones con repetición, luego

$$(1+x)^{-n}=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n+r-1}{r}$$

Sería, teniendo en cuenta los signos, la F.G. de las combinaciones con repetición.

Caso de elementos con repetición prefijada

Este es el caso con el que comenzamos a estudiar las F.G. hace dos entradas. Si deseamos combinaciones con repetición, pero en las que algunos elementos tienen un máximo en su repetición (no se suele estudiar este caso en los niveles elementales), debemos usar otra técnica. Por ejemplo:

Disponemos de varias fichas en cada una de las cuales se ha dibujado una forma distinta. Por ejemplo esta distribución:

☺	☺	✡	✡	✡	✞	✞	✞	✞

¿De cuántas formas distintas se puede tomar un conjunto de cinco símbolos? Al hablar de conjunto, no tendremos en cuenta el orden.

Basta usar, como ya vimos, un producto de polinomios en los que los exponentes representan las repeticiones posibles de cada símbolo:

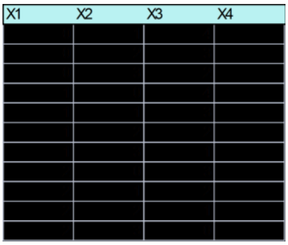
$F(x)=(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+x^3+x^4)$

Buscamos con PARI su coeficiente de grado 5, que representa los elementos seleccionados:

print(polcoeff((x^2+x+1)*(x^3+x^2+x+1)*(x^4+x^3+x^2+x+1),5))

con un resultado de 11 posibilidades

Son estas (con la hoja Cartesius):



Podemos interpretarlas así:

✞✞✞✞✡ ✞✞✞✡✡ ✞✞✡✡✡ ✞✞✞✞☺ ✞✞✞✡☺ ✞✞✡✡☺

✞✡✡✡☺ ✞✞✞☺☺ ✞✞✡☺☺ ✞✡✡☺☺ ✡✡✡☺☺

Este método es general: para crear la F.G, en un caso de combinaciones con repeticiones prefijadas **basta con formar polinomios de potencias para cada uno de los elementos** y después multiplicarlos todos.

Funciones generatrices exponenciales

Hasta ahora hemos manejado combinaciones, no hemos tenido en cuenta el orden. Cuando éste interviene, para abordar las variaciones y permutaciones, necesitamos otro tipo de funciones generatrices, las exponenciales:

Dada una sucesión de números (en general complejos) $\{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots\}$ llamaremos **función generatriz exponencial** de esa sucesión a la formada por

$$E(x) = a_0 + \frac{a_1 x}{1!} + \frac{a_2 x^2}{2!} + \frac{a_3 x^3}{3!} + \frac{a_4 x^4}{4!} + \cdots$$

Es idéntica a la definición general, pero en cada término de la suma dividimos entre el factorial del exponente. La raíz de esta técnica está en el desarrollo del binomio de Newton, en el que podemos sustituir Cm,n por Vm,n/n!

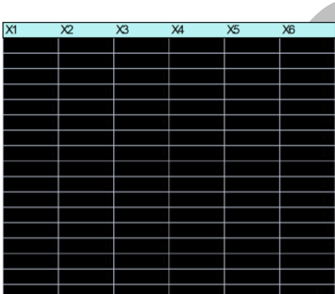
De esta forma, si $(1+x)^m$ era la F.G. de las combinaciones, también será ahora la **F.G exponencial de las variaciones**. Esta idea no es de mucha utilidad así en general, pero nos será muy útil en lo que sigue.

Variaciones con elementos repetidos

Un caso que no se suele estudiar en las enseñanzas medias es el las variaciones en las que se permite un máximo de repeticiones para cada elemento. Por ejemplo, tomar variaciones de 4 elementos en este conjunto de elementos con repetición: AAABBCDD.

Efectuamos previamente un acercamiento sin F.G.

En la imagen hemos obtenido con Cartesius todas las posibles combinaciones, escribiendo en cada columna el número de veces que se toman A,B,C y D, contando después las distintas ordenaciones de cada una. La suma obtenida fue de 162 variaciones.



Probamos ahora con una F.G. exponencial para cada elemento, hasta 3 para A, 2 para B y D y una para C. Observa que los términos de los polinomios están divididos entre factoriales.

FG=(1+x+x^2/2+x^3/6)(1+x+x^2/2)(1+x)(1+ x+x^2/2)

Desarrollamos esta función con wMaxima

```
(%i1) p:(1+x+x^2/2+x^3/6)*(1+x+x^2/2)*(1+x)*(1+ x+x^2/2);
      ratexpand(p);
```

$$(\%o1)\quad (x+1)\left(\frac{x^2}{2}+x+1\right)^2\left(\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+x+1\right)$$

$$(\%o2)\quad \frac{x^8}{24}+\frac{x^7}{3}+\frac{11\,x^6}{8}+\frac{11\,x^5}{3}+\frac{27\,x^4}{4}+\frac{26\,x^3}{3}+\frac{15\,x^2}{2}+4\,x+1$$

Nos resulta para el exponente 4 un coeficiente de 27/4, pero recordemos que es una F.G. exponencial, luego hay que multiplicar por 4! para encontrar el verdadero coeficiente, el número de variaciones:

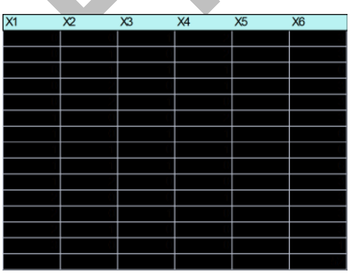
27/4*4!=27*6=162, que confirma el resultado previo.

Lo que hemos aprovechado en realidad es que al escribir estos paréntesis **cada elemento está representado por los órdenes que puede presentar**. Si usamos este factor (1+x+x^2/2+x^3/6) lo que estamos comunicando es que x^2 presenta dos posibles órdenes (que al repetir el símbolo se han perdido) y que x^3 proviene de 6 órdenes (permutaciones con tres elementos)

Quiere decir lo anterior que las contribuciones al coeficiente final de x^4, 27/4, ya vienen descontados los órdenes que se han perdido al repetir. Al final, al multiplicar por el factorial de 4, nos quedamos con los órdenes verdaderos. Es un poco complicado de entender, pero estúdialo, que funciona.

Lo comprobamos para el variaciones de 3 elementos: el coeficiente es 26/3 y si multiplicamos por 3! nos queda 26*2=52

Lo comprobamos con Cartesius



Lo generalizamos sin demostración:

Para encontrar el número de variaciones con repetición en el que conocemos el número máximo de repeticiones de un elemento, sean por ejemplo k, aportaremos a la F.G. un factor del tipo $1+x+x^2/2!+x^3/3!+\ldots+x^k/k!$ por cada elemento.

Permutaciones con repetición

La función generatriz que hemos empleado para variaciones coincide con la de permutaciones si el coeficiente que buscamos coincide con el total de las repeticiones de símbolos. En el ejemplo que estamos usando, AAABBCDD, el total de elementos es 8. Busca en el desarrollo mediante wMaxima de arriba el exponente 8 de la F.G. y verás que es 1/24. Como estamos usando funciones exponenciales, el verdadero valor será (1/24)*8! = 1680.

En este caso no es necesaria la F.G., pues ya sabemos que el número de permutaciones de AAABBCDD se calcula mediante 8!/(3!2!1!2!) =8!/24 = 1680, pero es conveniente comprobar que en este caso también funciona la técnica de las F.G.

PARTICIONES Y FUNCIONES GENERATRICES

Unimos hoy dos conceptos que ya hemos tratado en el blog:

Particiones de un número:

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2011/01/montones-de-piezas.html

Funciones generatrices:

http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2013/03/funciones-generatrices-en-combinatoria_14.html

Al unir las dos dan resultados mucho más potentes. Recomendamos la lectura previa de ambas. Recorreremos ahora los principales tipos de particiones, ayudados también por nuestra hoja de cálculo ***Cartesius***.

Particiones ordinarias P(n)

En la entrada ya referida las estudiamos desde un punto de vista general. Aplicaremos ahora el concepto de función generatriz.

Supongamos que deseamos encontrar todas las particiones ordinarias del número 6 (formas de representar 6 como suma con posible repetición de sumandos). Para ello no necesitamos ni funciones ni técnicas informáticas. Con un poco de atención llegaremos a que el 6 se descompone en suma de las siguientes formas:

6 = 5+1 = 4+2 = 4+1+1 = 3+3 = 3+2+1 = 3+1+1+1 = 2+2+2 = 2+2+1+1 = 2+1+1+1+1 = 1+1+1+1+1+1

Son once en total. Se supone que no se tiene en cuenta el orden.

Si queremos expresar este proceso mediante funciones generatrices hay que recordar que sus sumandos provenían de exponentes en un polinomio. En efecto, en este caso del 6 podemos considerar la función

$F(x) = (1+x+x^2+x^3+\ldots)(1+x^2+x^4+x^6\ldots)(1+x^3+x^6+x^9\ldots)\ldots(1+x^6+x^{12}+x^{18}\ldots)$

Si multiplicamos todo, el término de grado 6 se compondrá de todos los productos en los que el primer paréntesis aporta los sumandos iguales a 1, el segundo los que valen 2, el tercero, 3, y así hasta llegar al 6. Hemos tomado infinitas potencias en cada uno porque las mayores que 6 no van a influir, pero gracias a ello la expresión se simplifica como una progresión geométrica:

$$F(x) = \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1--x^3}\cdots\frac{1}{1-x^6}$$

O expresado de forma sintética y generalizando hasta n:

$$F(n) = \prod_{j=1}^{n}\frac{1}{1-x^j}$$

Después volveremos a esta función generatriz para adaptarla a casos particulares. La comprobamos para n=6. Vimos en anteriores entradas que con PARI se pueden desarrollar fácilmente.

print(taylor(1/(1-x)/(1-x^2)/(1-x^3)/(1-x^4)/(1-x^5)/(1-x^6),x,7))

Resultado:

1+x+2x^2+3x^3+5x^4+7x^5+**11x^6**+O(x^7) con el coeficiente 11 para x^6, como era de esperar.

Serían las once particiones esperadas. Como en ocasiones anteriores, este método nos da más, pues podemos leer otros coeficientes: con el 5 tendríamos 7 particiones, con el 4, 5, y así…A la inversa, si en lugar de pararnos en el 6 hubiéramos seguido escribiendo factores, obtendríamos más particiones, para 7, 8,… Así que recordemos la función generatriz (F.G.) para las particiones ordinarias del número n:

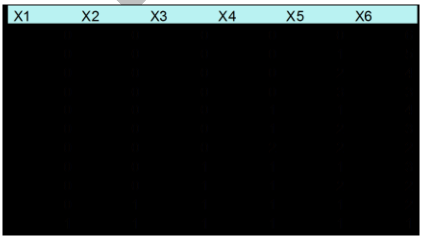
$$F(n) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1 - x^{j}}$$

Podemos comprobar el resultado con nuestra hoja Cartesius. Basta programar esto:

```
XTOTAL=6
XT=0..6
CRECIENTE
SUMA=6
```

Concreta un total de 6 conjuntos, formado cada uno por el rango 0..6, en el que sólo se seleccionan los arreglos crecientes (para evitar duplicidades) y con suma 6

Obtendríamos once resultados



X1	X2	X3	X4	X5	X6

Intenta obtener otros resultados similares al planteado en este ejemplo. Lo importante es que recuerdes la definición de partición de un número y su F.G.

Particiones en sumandos distintos Q(N)

Si al descomponer un número en sumandos no permitimos que figuren repetidos, obtendríamos resultados muy distintos, recogidos como la función de partición Q(n)

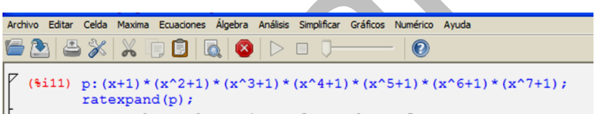
En este caso la función generatriz se simplifica mucho, pues en los paréntesis no han de figurar todas las potencias sino una sola por cada sumando. Así, para n=7 la F.G. sería

$F(x) = (1+x)(1+x^2)\ (1+x^3)\ldots\ (1+x^7)$

y generalizando para n

$$F(x) = \prod_{j=1}^{n} (1 + x^j)$$

Para el caso de 7 podemos expandir la F.G. mediante wxMaxima



Obtendremos un desarrollo en forma de polinomio, pero sólo serán útiles los coeficientes menores o iguales a 7:

$5x^7+4x^6+3x^5+2x^4+2x^3+x^2+x+1$

Ya tenemos la solución, el 7 se puede descomponer en 5 formas diferentes como suma de números naturales distintos:

7=6+1=5+2=4+3=4+2+1

Además, hemos obtenido que el 6 tiene 4 descomposiciones, el 5, 3 y así hasta el 1. Recuerda: estos son los únicos fiables en el desarrollo.

Con Cartesius:

XTOTAL=7
XT=0..7
CRECIENTE
SUMA=7
NO REPITE

5 soluciones

X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7
0	0	0	0	0	0	7
0	0	0	0	0	1	6
0	0	0	0	0	2	5
0	0	0	0	0	3	4
0	0	0	0	1	2	4

Particiones en partes impares P(N/Impar)

Aquí vemos rápidamente la utilidad de la función generatriz. Si en la fórmula general de las particiones eliminamos los pares de los paréntesis quedaría

$F(x) = (1+x+x^2+\ldots)(1+x^3+x^6+x^9\ldots)(1+x^5+x^{10}+x^{20}\ldots)\ldots(1+x^{2k+1}+x^{4k+2}+x^{6k+3}\ldots)$

que fácilmente se traduce, al igual que en las particiones ordinarias, a cocientes:

$$F(x) = \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^3}\frac{1}{1-x^5}\frac{1}{1-x^7}\cdots$$

O bien

$$F(n) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{1-x^{2j-1}}$$

Por ejemplo, para n=7, usando PARI, nos resultaría

print(taylor(1/(1-x)/(1-x^3)/(1-x^5)/(1-x^7),x,8))

1+x+x^2+2*x^3+2*x^4+3*x^5+4*x^6+5*x^7+O(x^8)

Como el coeficiente de x^7 es 5, ese será el número de particiones en impares. Como son tan pocas, las podemos escribir directamente: 7 = 5+1+1 = 3+3+1 = 3+1+1+1+1 = 1+1+1+1+1+1+1

Intenta comprobar, como en los casos anteriores, que con 6 resultarían 4, con 5, 3, y así con todos los coeficientes resultantes.

Comprobación con Cartesius

```
XT=CONCERO
XTOTAL=7
XT=0..7
XT=IMPAR
SUMA=7
CRECIENTE
REPITE
```

La instrucción CONCERO significa que a los impares les adjuntamos el cero para representar los sumandos que no entran en una suma determinada. Además, se impone la condición de ser impares.

5 soluciones

X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7
0	0	0	0	0	0	7
0	0	0	0	1	1	5
0	0	0	0	1	3	3
0	0	1	1	1	1	3
1	1	1	1	1	1	1

Este resultado coincide con el de representar 7 con sumandos distintos. En realidad siempre es así, como demostró Euler usando funciones generatrices:

El número de particiones de un número en sumandos distintos coincide con el de particiones en sumandos impares

Con el uso de las F.G. todo se reduce a un artificio algebraico:

Demostración

Todo se basa en que

$$1+x^k=\frac{1-x^{2k}}{1-x^k}$$

Así que partiendo de la F.G. de la partición en elementos distintos, representamos cada factor de esta forma, se simplificarán los factores de exponente par y sólo quedarán los impares en el denominador

$$Q(x)=\prod_{j=1}^{n}\left(1+x^j\right)=\prod_{j=1}^{n}\frac{1-x^{2j}}{1-x^j}=\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{1-x^{2j-1}}=P(n/impar)$$

En el caso de n=7 te proponemos una correspondencia biyectiva por el método de Sylvester. Para que pienses un poco más sólo daremos el proceso y tú sacas tus consecuencias:

7=6+1=5+2=4+3=4+2+1 = 2*3+1 = 5+2*1=4*1+3=4*1+2*1+1 y ahora sustituimos cada producto por la suma correspondiente: 7 = 3+3+1 = 5+1+1 = 1+1+1+1+3 = 1+1+1+1+1+1+1

¿Puedes generalizarlo?

Para el camino inverso deberíamos expresar cada suma de repetidos como suma respecto a potencias de 2 distintas que se sacan como factor común.

7 = 3+3+1 = 5+1+1 = 1+1+1+1+3 = 1+1+1+1+1+1+1 = *2+1=5+2*1=4*1+3=4*1+2*1+1

Serían siempre todos distintos, porque o se diferencian en el números sacado factor común o en las distintas potencias de 2.

PARTICIONES CON SUMANDOS RESTRINGIDOS

En la anterior entrada hemos supuesto que el número de sumandos en una partición era libre, hasta el mayor posible. Puede ocurrir, sin embargo, que sólo deseemos usar un máximo de hasta tres sumandos, o exactamente cuatro o cualquier otra posibilidad. Por otra parte, los sumandos pueden estar restringidos en magnitud dentro de un rango. Esto complica un poco las cuestiones.

Veremos con algunos ejemplos la utilidad de las funciones generatrices y la posibilidad de comprobar resultados con la hoja Cartesius.

¿De cuántas formas se puede descomponer el número 8 en sumandos no mayores que 4?

Si has entendido de qué van las funciones generatrices comprobarás que la siguiente es la adecuada para este caso

$F(x)=(1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots)(1+x^2+x^4+x^6+\ldots)(1+x^3+x^6+x^9+\ldots)(1+x^4+x^8+x^{12}+\ldots)$

Como en casos anteriores podemos expresarlo como sumas de sucesiones geométricas

$$P_{x\leq 4}(n)=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

Y en general

$$P_{x\leq k}(n)=\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{(1-x^j)}$$

Para aplicarlo al caso de 8 bastará buscar su coeficiente en la F.G. aplicada al caso en el que k=4. Lo escribimos en PARI

print(taylor(1/(1-x)/(1-x^2)/(1-x^3)/(1-x^4),x,9))

Y obtenemos

F.G.=1+x+2x^2+3*x^3+5*x^4+6*x^5+9*x^6+11*x^7+15*x^8+O(x^9)

Luego la solución del problema es P(8/sumandos no mayores que 4)=15

Si lo planteamos con Cartesius obtenemos los 15

```
XTOTAL=8
XT=0..4
CRECIENTE
SUMA=8
REPITE
```

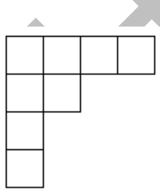
X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8
0	0	0	0	0	0	4	4
0	0	0	0	0	1	3	4
0	0	0	0	0	2	2	4
0	0	0	0	0	2	3	3
0	0	0	0	1	1	2	4
0	0	0	0	1	1	3	3
0	0	0	0	1	2	2	3
0	0	0	0	2	2	2	2
0	0	0	1	1	1	1	4
0	0	0	1	1	1	2	3
0	0	0	1	1	2	2	2
0	0	1	1	1	1	1	3
0	0	1	1	1	1	2	2
0	1	1	1	1	1	1	2
1	1	1	1	1	1	1	1

Particiones conjugadas

Ahora usaremos una técnica muy simple, pero que da buenos resultados. Como veíamos en otra entrada

(http://hojaynumeros.blogspot.com.es/2011/02/particiones-de-un-numero.html)

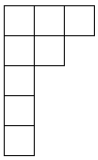
cada una de las particiones se puede representar mediante un diagrama de Ferrer, en el que se adosan tantas filas como sumandos entran en la partición, siendo la longitud de cada columna el valor del sumando. Así, la partición 8=4+2+1+1 se puede representar como



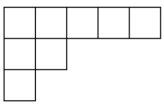
Cada fila representa un sumando: 4, 2, 1 y 1. Todos los diagramas que formemos con estas 15 particiones tendrán como máxima anchura cuatro cuadrados.

Lo bueno de estos diagramas, entre otras ventajas, es que si los giramos convirtiendo las filas en columnas y las columnas por filas seguirán siendo particiones, llamadas ***particiones conjugadas***.

Así, la partición 3+2+1+1+1



Se puede convertir en 5+2+1



Esta correspondencia es biyectiva. Si en las 15 particiones consideradas ninguna podía sobrepasar la anchura de 4, sus conjugadas no podrán tener más de cuatro filas, es decir, **más de cuatro sumandos**.

Esto es muy interesante: **Las particiones en sumandos no mayores que k coinciden en número con las particiones en no más de k sumandos**.

En nuestro ejemplo: si existen 15 particiones de 8 en sumandos no mayores que 4, también serán 15 las que se obtengan con no más de cuatro sumandos libres.

Lo comprobamos, intercambiando en Cartesius el 4 con el 8, y vemos que resultan también 15:

```
XTOTAL=4
XT=0..8
CRECIENTE
SUMA=8
REPITE
```

X1	X2	X3	X4
0	0	0	8
0	0	1	7
0	0	2	6
0	0	3	5
0	0	4	4
0	1	1	6
0	1	2	5
0	1	3	4
0	2	2	4
0	2	3	3
1	1	1	5
1	1	2	4
1	1	3	3
1	2	2	3
2	2	2	2

Así que si alguna vez no puedes construir la F.G. de un tipo de particiones, puedes acudir a las conjugadas por si resulta más sencillo. El siguiente ejemplo lo aclara.

¿De cuántas formas distintas podemos descomponer el número 12 en exactamente cuatro sumandos?

Acudimos a la conjugada: Este problema es el mismo que descomponer 12 en sumas de las cuales el mayor sumando sea 4. De otra forma: debe figurar al menos un 4 y el resto ser 1,2 o 3.

De esa forma la F.G. es fácil de obtener:

$F(x)=(1+x+x^2+x^3+\ldots)(1+x^2+x^4+x^6+\ldots)(1+x^3+x^6+x^9+\ldots)(x^4+x^8+x^{12}+\ldots)$

(hemos suprimido el 1 en el mayor sumando)

Generalizando

$$P_k(x) = x^k \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{1-x^j}$$

Efectuamos las comprobaciones en nuestro ejemplo

Con la función generatriz y PARI

print(taylor(x^4/(1-x)/(1-x^2)/(1-x^3)/(1-x^4),x,9))

Desarrollo:
x^4+x^5+2*x^6+3*x^7+5*x^8+6*x^9+9*x^10+11*x^11+15*x^12+O(x^13
)

Solución: el coeficiente de 12, que es 15.

Con Cartesius

Tenemos que eliminar el cero de los sumandos, para que sean exactamente cuatro. Por eso el rango será 1..12

```
XTOTAL=4
XT=1..12
CRECIENTE
SUMA=12
REPITE
```

Resultado 15

X1	X2	X3	X4
1	1	1	9
1	1	2	8
1	1	3	7
1	1	4	6
1	1	5	5
1	2	2	7
1	2	3	6
1	2	4	5
1	3	3	5
1	3	4	4
2	2	2	6
2	2	3	5
2	2	4	4
2	3	3	4
3	3	3	3

Problema conjugado

Ahora, en lugar de cuatro sumandos, el máximo ha de ser siempre 4, pero eso no es operativo, pues podemos eliminar siempre ese 4 y en lugar de formar una suma 12 pedimos que la suma sea 8. Este problema lo tenemos resuelto más arriba y nos resultó 15, como era de esperar.

HISTORIAS DE UN TANTEO

Un partido de fútbol terminó con el resultado de 5 a 2. ¿Qué tanteos previos, incluido el 0 a 0, se pudieron dar? ¿Cuántas historias pudo tener el partido hasta llegar a ese resultado final?

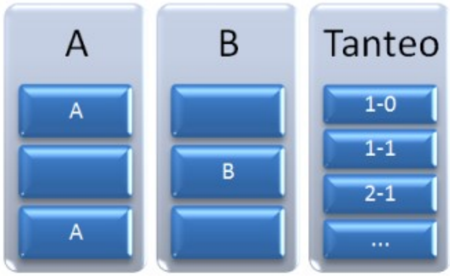
Este es un problema elemental que suele figurar en textos de Combinatoria de tipo elemental o medio. La primera pregunta es muy sencilla: como los goles caen de uno en uno, para llegar al 5-2 se ha pasado por 8 tanteos (con el 0 a 0). Respecto al número posible de historias o desarrollos, en este caso existen 21. Si llamamos A a un equipo y B a otro, la secuencia de goles puede haber sido

AAAAABB, AAAABAB; AAABAAB, AABAAAB, ABAAAAB, BAAAAAB, AAAABBA, AAABABA, AABAABA, ABAAABA, BAAAABA, AAABBAA, AABABAA, ABAABAA, BAAABAA, AABBAAA, ABABAAA, BAABAAA, ABBAAAA, BABAAAA, BBAAAAA

Pensando en el uso de esta cuestión en las aulas, se puede aprovechar en varios tipos de aprendizajes distintos:

Representación

Si el alumnado ha entendido lo que se pide, ¿cómo podría representar la historia de un partido? Se podría sugerir que se inventaran varias formas, y no sólo una, pues en ese caso la que surgiría más natural es la de escribir los tanteos y perderíamos otras. Por ejemplo, la historia ABAAABA es muy probable que la representaran como 1-0, 1-1, 2-1, 3-1, 4-1, 4-2 y 5-2. Otros acudirían a una doble columna o un diagrama en árbol:



¿Se te ocurren más formas para representar las historias? Si se lo encargas a tus alumnos quizas te den alguna sorpresa.

Recuento

¿Por qué hay 21 historias posibles para el 5 a 2?

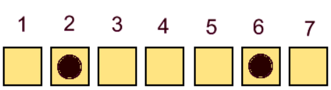
Si usamos la primera representación del tipo AAABABA descubriremos que estamos tratando con permutaciones de 7 elementos con repetición, con A tomada 5 veces y B dos.

Según la Combinatoria, su número es 7!/(2!*5!) = 7*6/2 = 21

Si esto se plantea en el aula, el mejor momento sería el inmediato anterior a la explicación teórica. Así se trabaja el problema a base de recuentos y puestas en común sin acudir a fórmulas.

Así que este problema equivale a permutar dos elementos A y B con un número fijado para cada uno. No es difícil descubrir que también se trata de un caso de combinaciones. En efecto, el equipo B ha de conseguir dos goles, y existen 7 ocasiones para hacerlo. El primer gol tiene 7 posibilidades en su localización y el segundo 6, luego en total son 42 y hay que dividir entre 2 porque los goles son indistingibles.

También se trata de un problema de cajas y bolas. Hay que situar dos bolas indistinguibles en siete cajas distinguibles con un máximo de una bola por caja:



Tal como se indicó antes, llegamos de nuevo a las combinaciones. El número de historias es $C_{7,2}$.

Si das clases de Matemáticas les puedes plantear esto a tus alumnos: Los goles van cayendo uno a uno formando una lista de siete. ¿En qué número de orden es más probable que caiga el segundo gol del perdedor? Que cuenten, que cuenten…

Simulación

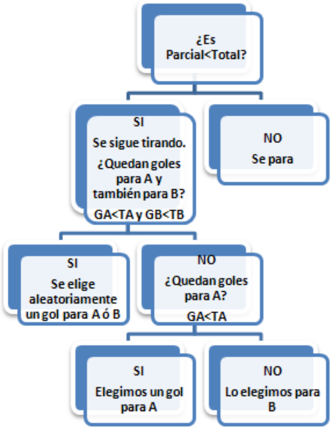
Si se reparten monedas, dados o ruletas por la clase, se podrían intentar algunas simulaciones. Por ejemplo, ¿cómo se organizaría una simulación de las historias posibles del resultado 5-2?

Proponemos una técnica que tiene un peligro oculto: Se van tirando monedas una a una. La cara puede ser un gol de A y la cruz el de B. Como A obtendrá 5 goles, al llegar a ese número rellenamos el resto con B, y si se obtienen 2 goles de B, rellenamos con A.¿Cómo simular las historias posibles de un tanteo de 5 goles a 2?

Si disponemos de una moneda, podemos asignar la cara al equipo A y la cruz al B. Si el resultado es 5-2, pararemos la simulación cuando A llegue a 5 o B llegue a 2 y, en ambos casos completaremos sin tirar la moneda. Por ejemplo, si la moneda nos ha proporcionado la lista de goles AABAB, completaremos hasta AABABAA, ya sin el uso del azar. Si nos resultara AAAAA la convertiríamos en AAAAABB.

Si te interesa el diseño en hoja de cálculo, te ofrecemos una simulación en la que las celdas importantes tienen todas la misma fórmula. Esto último constituye un condicionante muy útil para aprender a usar la función condicional SI.

Antes de nada, estudiemos el esquema de decisión de la simulación. Lo ordenaremos como un organigrama o árbol de decisión. La idea es que la celda que contenga la fórmula genere el símbolo A o el B de forma aleatoria, pero que pare y rellene cuando el tanteo se haya completado. Proponemos el siguiente:



Las variables usadas significan:
Total: Número total de goles del tanteo
Parcial: Goles totales que ya se llevan.
GA: Goles que lleva A
GB: Goles que lleva B
TA: Total de goles de A en el tanteo
TB: Ídem de B
Esta estructura da una fórmula para las celdas que contendrán los goles A ó B:

=SI(Parcial<Total;SI(Y(GA<TA;GB<TB);SI(Aleatorio>0,5;"A";"B");SI(GA<TA;"A";"B"));" ")

Impresiona un poco, ¿verdad?.

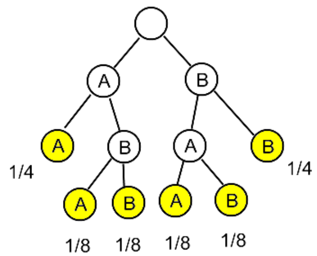
Si deseas estudiar más a fondo esta estructura de celdas, descarga este archivo: http://hojamat.es/blog/tanteos.zip

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	A.Roldán 2011			Historias de un tanteo					
2									
3				Tanteo	A	5	B	2	
4									
5									
6									
7	Historia		A	A	A	A	B	A	B
8									
9	Goles A	0	1	2	3	4	4	5	5
10	Goles B	0	0	0	0	0	1	1	2
11									
12	Total	0	1	2	3	4	5	6	7
13									

Y ahora vamos con el peligro: esta simulación no produce sucesos equiprobables. En el caso del tanteo de 2 a 2, por ejemplo, resultarían más casos en AABB y BBAA que en el resto. Puedes verlo en este listado procedente de una simulación:

B	B	A	A	91
A	A	B	B	105
A	B	B	A	49
B	A	A	B	30
A	B	A	B	40
B	A	B	A	41

Si se estudia la simulación mediante un diagrama en árbol se comprenden mejor las probabilidades. Lo concretamos para un tanteo de 2-2



Los círculos de color naranja representan los momentos de parada de la simulación y su posterior relleno con A o B. Se percibe claramente la diferencia de probabilidades.

Para evitar esto se deben organizar las simulaciones completas, con todos los goles fijados, y después desechar los que no coincidan con el tanteo previsto. Por ejemplo, para simular un 3-1 tiraremos cuatro monedas seguidas, lo que nos producirá casos como AAAA, BABA que habrá que desechar, y quedarnos sólo con AAAB, AABA, ABAA y BAAA. De esta forma obtendremos sucesos equiprobables.

SOLUCIONES

PROBLEMAS

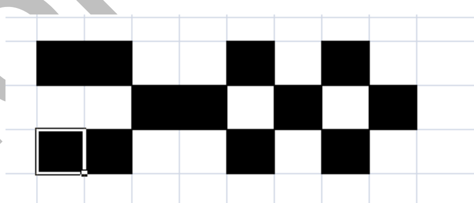
Combinado de murciélago

(a) Consideremos el caso contrario, que las cinco vocales estén juntas. Si las consideráramos como un solo elemento, obtendríamos en total 6! permutaciones. Si después las permutamos entre ellas, de cada permutación se obtendrían 5!, luego el caso contrario constaría de 6!*5! sucesos. Por tanto, la solución pedida es 10!-6!*5! = **3542400 permutaciones.**.

(b) Sólo existen dos configuraciones que cumplan lo exigido: CVCVCVCVCV y VCVCVCVCVC, luego la solución es **2*5!*5! = 28800 permutaciones.**

(c) Es similar al contrario de (a). Basta eliminar el factor 5!, luego la solución es **6!=720 permutaciones.**

Coloreando el tablero



La clave la tiene la primera fila (o primera columna, según como desees trabajar), según sus colores estén totalmente alternados o no.

Si están alternados, sólo hay dos posibilidades en la primera fila, BNBNBNBN y NBNBNBNB. Estas dos condicionan a las demás, que sólo pueden colorearse negro bajo y blanco bajo blanco, o bien alternados, negro bajo blanco o blanco bajo negro. Cada fila volverá a tener dos posibilidades, luego en total existirán 2^8 formas de colorear de forma alterna: 2^8 =256.

El resto de las configuraciones de la primera fila condicionan totalmente a todas las de abajo. Haz la prueba.

Luego sólo quedarían 254 posibilidades. Sumamos y obtenemos la solución: 256+254 =510

Sumas generadas con tres cifras

Para las sumas comprendidas entre 0 y 9 y entre 18 y 27 no hay problema de cálculo, pues van apareciendo los números triangulares como suma de consecutivos:

S	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
N(S)	**1**	**3**	**6**	**10**	**15**	**21**	**28**	**36**	**45**	**55**

En las sumas restantes hay que usar el esquema de decisión sugerido en el enunciado. Los datos que faltan son, que si S-A>=9, los casos que aparecen son 19-S+A, y en el caso contrario S-A+1. Puedes ir comprobándolo.

Por las ayudas incluidas y aplicando la simetría existente, se puede pensar que la suma pedida estará entre 10 y 12

Para S=10 podemos construir una tabla con el valor de A, el de S-A y los casos producidos:

Suma 10	S-A	Casos
0	10	**9**
1	9	**10**
2	8	9
3	7	8
4	6	7
5	5	6
6	4	5
7	3	4
8	2	3

9	1	2
		63

Hemos dado con la solución: **S=10**

En la tabla se han destacado en negrita los casos pertenecientes a S-A>=9.

Como el problema tiene una contrapartida simétrica, existe otra solución: **S=17**

Multicombinatorios

Solución

$$3003 = \binom{3003}{1} = \binom{3003}{3002} = \binom{14}{6} = \binom{14}{8} = \binom{15}{5} = \binom{15}{10} = \binom{78}{2} = \binom{78}{76}$$

Para llegar a esta solución con hoja de cálculo existen dos caminos:

(A) Se forma el triángulo de Tartaglia. Puedes usar las hojas de cálculo contenidas en la página http://www.hojamat.es. (Ver apartado de herramientas de Combinatoria)

Se selecciona todo el rango del triángulo y se le asigna el nombre de Tartaglia.

Con la función =CONTAR.SI(tartaglia;3003) se buscan las veces en las que aparece el 3003 u otro número cualquiera que desees probar.

Con este procedimiento puedes encontrar otros números "multicombinatorios", como 120, 210, 1540, 7140, etc. Sus descomposiciones en factores primos nos pueden dar una pista del porqué de su propiedad.

120= 2*2*2*3*5; 210=2*3*5*7; 1540=2*5*7*11; 3003=3*7*11*13; 7140=2*3*5*7*17

La gran variedad de su factores primos hace que estos números puedan aparecer en cocientes de factoriales, como los usados en los números combinatorios.

(B) Se puede organizar una búsqueda en Basic.

Como el código es un poco largo, se incluye en el Apéndice, y aquí se dará una idea de su construcción.

(1) Para cada número N a probar se organiza un bucle doble para el índice superior m del número combinatorio y para k el inferior

El índice m recorrerá los valores entre 1 y N, porque tiene que ser menor o igual que él. El índice k recorrerá todos los valores hasta que el número combinatorio iguale o sobrepase a N. Estas dos estrategias se basan en el carácter creciente de los números combinatorios salvo simetrías.

Para cada valor concreto de N se cuentan las veces en las que los valores m y k producen un número combinatorio igual a N. Se pueden eliminar los casos triviales y los simétricos.

Una concurrencia

Solución:

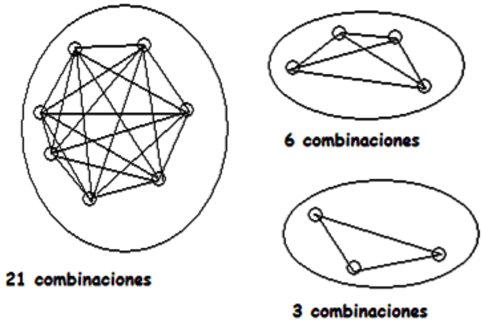
La imagen significa que $T_{a-1} + a.b+T_{b-1} = T_{a+b-1}$

Ya que $a(a-1)/2 + ab+b(b-1)/2 = (a^2-a+2ab+b^2-b)/2 = (a+b)(a+b-1)/2$

La fórmula anterior, expresada mediante números combinatorios, es idéntica a la propuesta

$$\binom{a}{2} + \binom{b}{2} + a.b = \binom{a+b}{2}$$

Respecto al experimento, hay que considerar que el número de combinaciones entre los n elementos de un conjunto viene dado por $\binom{n}{2}$, así es de aplicación la igualdad anterior y resulta que cada vez que un conjunto se convierte en dos de cardinales a y b respectivamente se pierden a.b combinaciones. Puedes verlo en la siguiente imagen que corresponde a la partición de un conjunto de 7 elementos



Observa que en el conjunto de 7 elementos existen 21 combinaciones entre ellos (segmentos de recta en la imagen). Si descomponemos 7 en 4+3, las combinaciones se reducen a 6+3 =9.

Se han perdido 12, que se corresponden con las existentes entre un subconjunto y otro (producto cartesiano). que equivalen a 4*3 = 12.

Si seguimos descomponiendo aparecerán nuevos productos, hasta que todos los conjuntos sean unitarios. Por tanto, la suma de todos esos productos coincidirá con, que en este caso es 7*6/2 = 21, y en el ejemplo de más arriba, 12*11/2 = 66

Subfactoriales

(1) Para demostrar que $D_n = nD_{n-1}+(-1)^n$ basta acudir a sus desarrollos:

$$D_n = n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots(-1)^n\frac{1}{n!}\right)=$$

$$n\cdot(n-1)!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\right)+(-1)^n\frac{n!}{n!}=n\cdot D_{n-1}+(-1)^n$$

Para la fórmula de Euler D_n=(n-1)*(D_{n-1}+D_{n-2}) se sigue un procedimiento similar:

$$D_{n-1}+D_{n-2}=(n-1)!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+...(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\right)+(n-2)!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+...(-1)^{n-2}\frac{1}{(n-2)!}\right)=$$

$$=(n-2)!\cdot(n-1+1)\cdot\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+...(-1)^{n-2}\frac{1}{(n-2)!}\right)+(-1)^{n-1}$$

Si ahora multiplicamos por n-1 queda

$$(n-1)(D_{n-1}+D_{n-2})=n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+...(-1)^{n-2}\frac{1}{(n-2)!}\right)+(-1)^{n-1}\cdot(n-1)$$

$$(n-1)(D_{n-1}+D_{n-2})=n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+...(-1)^{n-2}\frac{1}{(n-2)!}+\frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)}{n!}\right)$$

$$(n-1)(D_{n-1}+D_{n-2})=n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+...(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}+\frac{(-1)^{n}}{n!}\right)=D_n$$

Identidad del hexágono

La demostración es puramente algebraica:

$$\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k}=\binom{n-1}{k}\binom{n}{k-1}\binom{n+1}{k+1}=$$

$$\frac{(n-1)...(n-k+1)}{(k-1)!}\times\frac{n(n-1)...(n-k)}{(k+1)!}\times\frac{(n+1)n...(n-k+2)}{k!}=$$

Podemos reorganizar los factores y queda:

$$\frac{(n-1)...(n-k)}{k!}\times\frac{n(n-1)...(n-k+2)}{(k-1)!}\times\frac{(n+1)n...(n-k+1)}{(k+1)!}=$$

$$\binom{n-1}{k}\binom{n}{k-1}\binom{n+1}{k+1}$$

También podemos reorganizar factores si usamos sólo factoriales:

$$\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k}=\binom{n-1}{k}\binom{n}{k-1}\binom{n+1}{k+1} =$$

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\times\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}\times\frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}=$$

$$\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}\times\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}\times\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}=$$

$$\binom{n-1}{k}\binom{n}{k-1}\binom{n+1}{k+1}$$

Fronteras en un tablero

La solución al problema es que el mínimo vale 10, y se da cuando un rectángulo de 10 por 5 se pinta de negro y su complementario de blanco. El máximo, 180, se alcanza si todos los cuadrados blancos y negros están alternados como en el juego del ajedrez.

(a) Existen números que nunca se dan, como el 11, porque si en la configuración del 10 (50 negros a un lado y cincuenta blancos a otro) se mueve un solo cuadrado de un color a otro, la diferencia entre fronteras ganadas y perdidas nunca es 1)

(b) Si las bolas son distinguibles, habría que multiplicar el resultado por el factorial del número de bolas.

Chica, chico, chica

Solución: es el conjunto complementario, los que tienen dos o más seguidos. Se hallan restando los anteriores a 2 elevado a n

Problemas de Combinatoria con comprobación

La solución es 48 banderas.

La puedes lograr con un diagrama de árbol. Las primeras ramas son tres, pero las siguientes sólo pueden ser dos. Por tanto la solución es 3*2*2*2*2 = 48

Para comprobar con Combimaq has de concretar estos datos:

Total de elementos: 3

Entran en cada arreglo: 5

Importa el orden: SÍ

Se pueden repetir: Sí

Con ello obtendrás un número total de 243 posibles banderas.

Para obligar a que no se repitan colores en barras consecutivas has de activar Condición de tipo algebraico y rellenar la condición

(SU1#SU2)*(SU2#SU3)*(SU3#SU4)*(SU4#SU5)

Obtendrás 48 casos favorables, que es la solución.

PROFUNDIZACIONES

Collares bicolores

Collares de 2 negras y 4 blancas

X	X	O	O	O	O	C1
X	O	X	O	O	O	C2
X	O	O	X	O	O	C3
X	O	O	O	X	O	C2
X	O	O	O	O	X	C1
O	X	X	O	O	O	C1
O	X	O	X	O	O	C2
O	X	O	O	X	O	C3
O	X	O	O	O	X	C2
O	O	X	X	O	O	C1
O	O	X	O	X	O	C2
O	O	X	O	O	X	C3
O	O	O	X	X	O	C1
O	O	O	X	O	X	C2

O O O O X X C1

IDEAS PARA EL AULA

Historias de un tanteo

Si recorres los casos verás que los números de orden se reparten las posibilidades así:

1	0
2	1
3	2
4	3
5	4
6	5
7	6

AAAAABB
AAAABAB
AAABAAB
AABAAAB
ABAAAAB,
BAAAAAB
AAAABBA
AAABABA
AABAABA
ABAAABA
BAAAABA
AAABBAA
AABABAA
ABAABAA,
BAAABAA
AABBAAA,
ABABAAA
BAABAAA

ABBAAAA
BABAAAA
BBAAAAA

Para cada posición del segundo gol, sea k, el primer gol recorre k-1 posiciones.

El más probable, por tanto, es el último lugar.

Apéndice

Búsqueda de multicombinatorios

Entrada: Inicio (N1) y final de búsqueda (N2)

Operación: Busca números multicombinatorios entre el inicio y el finl dados.

Código en Basic

```
Sub buscacombi

Dim fila,i,j,k,m,l,n
dim a,b,c

fila=10

for i=N1 to N2
a=0
m=1
while m<=i
n=1
l=m
while n<=int(m/2)-1 and l<=i
if l=i and n>1 then
a=a+1
end if
l=l*(m-n)/(n+1)
n=n+1
wend
m=m+1
wend

if a>1 then
fila=fila+1
StarDesktop.CurrentComponent.sheets(0).GetCellByPosition(4,fila).val
ue=i
```

```
StarDesktop.CurrentComponent.sheets(0).GetCellByPosition(5,fila).val
ue=a
end if
next i
End Sub
```

FUNCIÓN SUBFACTORIAL

Entrada: Un número natural **n**

Operación: Devuelve el subfactorial de ese número

Código en Basic

Primera versión

```
Public function subfactorial1(n)
dim s,i

if n=0 then s=1
if n=1 then s=0
if n>1 then
s=1
for i=1 to n
s=i*s+(-1)^i
next i
end if
subfactorial1=s
end function
```

Segunda version

```
Public function subfactorial2(n)
dim s,i,t,u

if n=0 then s=1
if n=1 then s=0:t=1
if n>1 then
s=1:t=0
for i=1 to n
u=s
```

```
s=(i-1)*(s+t)
t=u
next i
end if
subfactorial2=s
end function
```